ABELKONKURRANSEN 2001-02

Finale, 15. mars 2002

kl. 09.00–13.00

Oppgave 1.

a) Finn alle hele tall k slik at både $k+1$ og $16k+1$ er kvadrattall.

b) Finn alle hele tall a, b og c slik at $(2a+b)(2b+a) = 5^c$.

Oppgave 2.

La a_0 og b_0 være to forskjellige reelle tall slik at $a_0 < b_0$. For $n = 1, 2, 3, \ldots$ definerer vi $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ og $b_{n+1} = \frac{1}{3}(2a_{n+1} + b_n)$

a) Vis at for alle n gjelder $a_{n+1} > a_n$, $b_{n+1} < b_n$ og $a_n < b_n$.

b) Vis at det finnes nœyaktig ett reelt tall k som er slik at $a_n < k < b_n$ for alle n, og finn dette tallet uttrykt ved a_0 og b_0.

Oppgave 3.

a) Et punkt O ligger inne i et parallellogram $ABCD$ slik at $\angle AOB + \angle COD = 180°$. Vis at $\angle OBC = \angle ODC$.

b) Seks pinner med lengder 17, 18, 19, 20, 21 og 23 danner sidekantene til en triangular pyramide (også kalt et tetraeder). Kan det finnes en kule som tangerer alle de seks pinnene?

Oppgave 4.

Det er gitt et heltall $N > 1$. Arne og Britt spiller fœlgende spill:

(1) Arne sier et positivt heltall A.
(2) Britt sier et heltall $B > 1$ som enten er en divisor av A eller et multippel av A. (A selv er en mulighet.)
(3) Arne sier et nytt tall A som er enten $B-1$, B eller $B+1$.

Spillet fortsetter ved gjenta punkt 2 og 3. Britt vinner hvis hun greier å få sagt tallet N fœr det 50. tallet er blitt sagt. Ellers vinner Arne.

a) Vis at Arne har en vinnende strategi dersom $N = 10$

b) Vis at Britt har en vinnende strategi dersom $N = 24$

c) For hvilke N har Britt en vinnende strategi?