

# Abel-konkurransen 1992

## FINALE — FASIT

### Oppgave 1

La oss ordne  $x$ ,  $y$  og  $z$  slik at  $x \leq y \leq z$ . Vi får da:

$$\begin{aligned} 9x \leq xyz = 3(x + y + z) \leq 9z \\ \downarrow \\ xy \leq 9 \leq yz \\ \downarrow \\ x \leq 3 \leq z \end{aligned}$$

Nå vet vi altså at  $x \leq 3$ ,  $xy \leq 9$  og  $z = 3(x + y)/(xy - 3)$ ; herfra kan vi prøve ut mulighetene og se hvilke som går. Vi finner da at  $(x, y, z) = (1, 4, 15), (1, 5, 9), (1, 6, 7), (2, 2, 12), (2, 3, 5)$  eller  $(3, 3, 3)$ .

### Oppgave 2

Siden  $M$  har 10 elementer kan en delmengde  $A$  velges på  $2^{10} = 1024$  forskjellige måter. Hvis vi tar summen av alle elementer i  $A$  får vi et tall som er mindre enn summen av alle elementer i  $M$ ; spesielt får vi at denne summen blir mindre enn 1000. Siden det finnes 1024 delmengder av  $M$ , mens summen av elementene kan anta færre enn 1000 forskjellige verdier, må det finnes to forskjellige mengder  $A$  og  $B$  slik at summen av elementene er like.

Dersom  $A$  og  $B$  har felles elementer, fjerner vi disse fra både  $A$  og  $B$ . Vi får da to forskjellige mengder uten felles elementer slik at summen av elementene er like for de to mengdene.

### Oppgave 3

La  $\angle A = 2v$ . Arealet av trekanten  $ABC$  er  $\sin 2v AB \cdot AC/2$ . Alternativt kan vi finne arealet av  $ABC$  ved å summere arealene til  $ABP$  og  $APC$ ; dette gir at arealet til  $ABC$  er  $\sin v AB \cdot AP/2 + \sin v AP \cdot AC/2$ . Dette gir

$$\sin 2v AB \cdot AC/2 = \sin v (AB + AC) \cdot AP/2,$$

som igjen gir

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{AB + AC}{AB \cdot AC} = \frac{\sin 2v}{\sin v AP}.$$

Dette uttrykket er konstant når linjen roteres.

#### Oppgave 4

At  $(x, y, z)$  ligger på overflaten av enhetskulen med sentrum i origo betyr at  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

Vi har at

$$\begin{aligned}xy + xz + yz &= \left( (x + y + z)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \right) / 2 \\ &= (x + y + z)^2 / 2 - 1/2 \\ &\geq -1/2\end{aligned}$$

med likhet når  $x + y + z = 0$ : f.eks. for  $x = -y = \sqrt{2}/2$ ,  $z = 0$ . Minste verdi av uttrykket er altså  $-1/2$ .

Vi har at

$$\begin{aligned}xy + xz + yz &= x^2 + y^2 + z^2 - \left( (x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 \right) / 2 \\ &= 1 - \left( (x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 \right) / 2 \\ &\leq 1\end{aligned}$$

med likhet når  $x = y = z = \pm\sqrt{3}/3$ . Største verdi at uttrykket er altså 1.