Abel-konkurransen 1995–96

FINALE — FASIT

Oppgave 1

a) Hvis $t = a^2 + b^2$ så er $2t = (a+b)^2 + (a-b)^2$ og er dermed lykkelig.

b) La $t = a^2 + b^2$ og anta at $3t$ er lykkelig. Da finnes heltall x og y slik at $3(a^2 + b^2) = x^2 + y^2$. Eventuelle felles faktorer blant a, b, x og y kan forkortes, så spesielt kan vi anta at a, b, x og y ikke alle er delelige med 3. Det er lett å sjekke at kvadrattall aldri er på formen $3k + 2$, så siden $x^2 + y^2$ er delelig med 3, må også x og y være delelige med 3. La $x = 3u$ og $y = 3v$ der u og v er heltall. Da blir $a^2 + b^2 = 3(u^2 + v^2)$, og ved samme argument følger at a og b er delelige med 3. Men dette gir en motsigelse siden a, b, x og y ikke alle kunne være delelige med 3. Det følger at $3t$ ikke er lykkelig.

Oppgave 2

a) La s være lengden av en side i trekanten. Da er trekantens areal $\frac{1}{2}s \cdot PQ + \frac{1}{2}s \cdot PR + \frac{1}{2}s \cdot PS = \frac{1}{2}s \cdot (PQ + PR + PS)$. Det følger at $PQ + PR + PS = 2 \cdot \text{Areal}/s$ og dermed er uavhengig av P.

b) Setningen om periferivinkler gir at $\angle ADC = \angle ABC$ og dermed $\angle ADC = \angle ACB$. Det følger at trekantene AEC og ACD er formlike, og dermed er $AC/AD = AE/AC$. Dette gir at $AE \cdot AD = AC^2$ som er uavhengig av plasseringen av E.

Oppgave 3

a) La S være summen av alle de 1997 tallene, la S_1 være summen av de 97 minste tallene, og la S_2 være summen av de 1900 øvrige. Siden $S_1 > 0$ må S_1 inneholde minst ett positivt tall. Dermed må alle tallene i S_2 også være positive, og det følger at $S = S_1 + S_2 > 0$.

b) Siden det er 91 elever og 3 klasser, må det i en av klassene være minst 31 elever, og blant disse finnes minst 16 som er av samme kjønn. Siden det til elever av samme kjønn kan være gitt høyst 5 forskjellige poengsummer, må samme poengsum ha vært gitt minst 4 av disse 16.

Oppgave 4

Polynomet $p(x) - b$ har $x = a$ som et nullpunkt, og dermed $x - a$ som en faktor. Tilsvarende blir $x - b$ en faktor i $p(x) - a$. Hvis x er et heltall slik at $p(x) = x$ må derfor $\frac{x-b}{x-a}$ og $\frac{x-a}{x-b}$ begge være heltall. Disse brøkene har produkt 1, og siden $a \neq b$ må derfor begge være lik -1. Dette gir $x = \frac{1}{2}(a+b)$ som eneste mulighet.