

# Abel-konkurransen 1997–98

## Fasit til andre runde

**Oppgave 1:** Vi har at  $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = 31 - 6 = 25$ . Det følger at  $a-b = 5$ . **A**

**Oppgave 2:**  $9991 = 10000 - 9 = 100^2 - 3^2 = (100 - 3)(100 + 3) = 97 \cdot 103$ . Siden 103 er et primtall blir dette den største primfaktoren. **A**

**Oppgave 3:** Anta at Mari har spilt  $n$  runder og totalt oppnådd  $A$  poeng. Opplysningene i oppgaven kan da uttrykkes som  $A - 185 = 176(n - 1)$  og  $A = 177n$ . Setter vi den siste likningen inn i den første får vi  $177n - 185 = 176n - 176$  som gir at  $n = 9$ . For å øke gjennomsnittet til 178 trenger hun altså  $10 \cdot 178 - 9 \cdot 177 = 178 + 9(178 - 177) = 187$  poeng i den neste runden. **D**

**Oppgave 4:** Observer at  $128 > 7 \cdot 18$ . Dermed må minst en kasse inneholde mer enn 18 epler. Det er mulig å fordele eplene slik at det er 19 epler i to av kassene og 18 i hver av de øvrige, så den maksimale verdien for  $N$  blir altså 19. **E**

**Oppgave 5:** la  $a$  og  $b$  være katetene og  $c$  hypotenusen i trekanten. Da er  $a + b = 60 - c$  og  $a^2 + b^2 = c^2$ . Trekantens areal kan uttrykkes både som  $ab/2$  og  $6c$ , som gir at  $ab = 12c$ . Av dette får vi

$$(60 - c)^2 = (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 24c.$$

Løser vi opp parentesene til venstre står vi igjen med likningen  $3600 = 144c$  som gir at  $c = 25$ . **B**

**Oppgave 6:** Anta at det er det første sifferet som er størst og som dermed er summen av de to andre. Hvis det første sifferet er 9 blir det 8 muligheter for det andre, som hver gir en unik mulighet for det siste sifferet. Tilsvarende blir det 7 muligheter der det første sifferet er 8. Fortsetter vi slik får vi tilsammen  $8+7+6+5+4+3+2+1 = 36$  muligheter der det første sifferet er størst. Tilsvarende blir det 36 muligheter der det midterste sifferet er størst og 36 muligheter der det siste sifferet er størst. Svaret blir altså  $3 \cdot 36 = 108$ . **E**

**Oppgave 7:** Med  $x = y = 0$  får vi at  $f(0) = 2f(0) + 1$  som gir at  $f(0) = -1$ . Setter vi  $x = 3$  og  $y = -3$  får vi nå at  $f(0) = f(3) + f(-3) - 53$ . Siden  $f(3) = f(-3)$  gir dette at  $2f(3) = f(0) + 53$ , altså  $f(3) = 26$ . **A**

**Oppgave 8:** Anta at det er  $N$  jenter på festen. Totalt antall par av jenter og gutter som kjenner hverandre er da  $2 \cdot 4 + (N - 2) \cdot 2$ . Siden ingen av de 6 guttene kjenner mer enn 3 jenter, er dette tallet høyst 18, det vil si at  $8 + 2(N - 2) \leq 18$  som gir at  $N \leq 7$ . Det er lett å se at  $N = 7$  er oppnåelig, så det største mulige antall jenter er dermed 7. **B**

**Oppgave 9:** Trekk linjen  $AC$  og slå en sirkel med radius 5 om  $A$ . Da må  $B$  ligge på denne sirkelen.  $\angle C$  er størst mulig hvis linjestykket  $BC$  tangerer denne sirkelen, noe som medfører at  $\angle B = 90^\circ$ . Pythagoras gir nå at  $BC = \sqrt{11}$  og arealet blir  $\frac{5}{2}\sqrt{11}$ . **E**

**Oppgave 10:** Observer først at  $m^3 + 5m = m^3 - m + 6m = m(m - 1)(m + 1) + 6m$  alltid er delelig med 3. Dermed er venstre side alltid delelig med 3, mens høyre side er på formen  $3k + 1$  og er dermed aldri delelig med 3. Likningen har altså ingen heltallige løsninger. **A**