

# Baltic Way 2003, matematisk lagkonkurranse

## Riga, 2. november 2003

Tillatt tid: 4,5 timer.

Spørsmål om oppgavesettet kan stilles den første halvtimen.

1. La  $\mathbb{Q}_+$  være mengden av de positive rasjonale tall.  
Finn alle funksjoner  $f : \mathbb{Q}_+ \rightarrow \mathbb{Q}_+$  slik at vi for alle  $x \in \mathbb{Q}_+$  har

$$(1) : f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$$

$$(2) : \left(1 + \frac{1}{x}\right)f(x) = f(x+1)$$

2. Bevis at enhver reell løsning av

$$x^3 + px + q = 0$$

tilfredsstillir ulikheten  $4qx \leq p^2$ .

3. La  $x$ ,  $y$  og  $z$  være positive reelle tall slik at  $xyz = 1$ . Vis at

$$(1+x)(1+y)(1+z) \geq 2 \left( 1 + \sqrt[3]{\frac{y}{x}} + \sqrt[3]{\frac{z}{y}} + \sqrt[3]{\frac{x}{z}} \right).$$

4. La  $a, b, c$  være positive reelle tall. Vis at

$$\frac{2a}{a^2 + bc} + \frac{2b}{b^2 + ca} + \frac{2c}{c^2 + ab} \leq \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}.$$

5. En tallfølge  $(a_n)$  er definert slik:  $a_1 = \sqrt{2}$ ,  $a_2 = 2$ , og  $a_{n+1} = a_n a_{n-1}^2$  for  $n \geq 2$ .  
Vis at for alle  $n \geq 1$  gjelder

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) < (2 + \sqrt{2})a_1 a_2 \dots a_n.$$

6. La  $n \geq 2$  og  $d \geq 1$  være heltall slik at  $d|n$ . La  $x_1, x_2, \dots, x_n$  være reelle tall slik at  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$ . Vis at det finnes minst  $\binom{n-1}{d-1}$  valg av  $d$  indekser  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_d \leq n$  slik at  $x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_d} \geq 0$ .

7. La  $X$  være en delmengde av  $\{1, 2, 3, \dots, 10000\}$  med følgende egenskap:  
Hvis  $a, b \in X$ ,  $a \neq b$ , så er  $a \cdot b \notin X$ . Hva er det største antallet elementer i  $X$ ?

8. På et bord ligger det 2003 drops. To spillere utfører trekk annenhver gang. Et trekk består i å spise et drops eller halvparten av dropsene på bordet (den "mindre halvdel" hvis det er et odde antall drops); minst et drops må spises i hvert trekk. Den som spiser siste drops, taper. Hvilken spiller – den første eller den andre – har en vinnende strategi?

9. Vi vet at  $n$  er et positivt heltall  $\leq 144$ . Ti spørsmål av typen "Er  $n$  mindre enn  $a$ ?" er tillatt. Svarene gis med en forsinkelse: Svaret på spørsmål nummer  $i$  gis like etter at spørsmål nummer  $(i+1)$  blir stilt,  $i = 1, 2, \dots, 9$ , men svaret på det tiende spørsmålet gis umiddelbart etter at det er stilt. Finn en strategi for å bestemme  $n$ .

10. Et *gitterpunkt* i planet er et punkt med heltallige koordinater. *Tyngdepunktet* til fire punkter  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , er punktet  $(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}, \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4})$ . La  $n$  være det største naturlige tallet med følgende egenskap: Det finnes  $n$  ulike gitterpunkter i planet slik at ingen fire av disse har et gitterpunkt som tyngdepunkt. Vis at  $n = 12$ .
11. Er det mulig å velge 1000 punkter i planet slik at minst 6000 avstander mellom to av disse er like?
12. La  $ABCD$  være et kvadrat. La  $M$  være et indre punkt på siden  $BC$  og  $N$  et indre punkt på siden  $CD$  slik at  $\angle MAN = 45^\circ$ . Vis at sentrum i sirkelen som er omskrevet trekant  $AMN$ , ligger på  $AC$ .
13. La  $ABCD$  være et rektangel med  $BC = 2 \cdot AB$ . La  $E$  være midtpunktet på  $BC$  og  $P$  et vilkårlig indre punkt på  $AD$ . La  $F$  og  $G$  være fotpunktene for høydene fra  $A$  på  $BP$  og fra  $D$  på  $CP$  henholdsvis. Vis at punktene  $E, F, P$  og  $G$  ligger på en sirkel.
14. La  $ABC$  være en vilkårlig trekant og la  $AMB, BNC$  og  $CKA$  være likesidete trekanter på utsiden av  $ABC$ . Gjennom midtpunktet på  $MN$  konstruerer vi normalen på  $AC$ ; tilsvarende konstruerer vi normaler på  $AB$  og  $BC$  gjennom midtpunktene på  $NK$  og  $KM$  henholdsvis. Vis at disse tre normalene skjærer hverandre i ett punkt.
15. La  $P$  være skjæringspunktet mellom diagonalene  $AC$  og  $BD$  i en syklisk firkant. En sirkel gjennom  $P$  tangerer siden  $CD$  i midtpunktet  $M$  på denne siden og skjærer dessuten linjestykkene  $BD$  og  $AC$  i punktene  $Q$  og  $R$  henholdsvis. La  $S$  være det punktet på linjestykket  $BD$  som er slik at  $BS = DQ$ . Parallellen til  $AB$  gjennom  $S$  skjærer  $AC$  i  $T$ . Vis at  $AT = RC$ .
16. Finn alle par av positive heltall  $(a, b)$  slik at  $a - b$  er et primtall og  $ab$  er et kvadrattall.
17. Alle de positive divisorene til et positivt heltall  $n$  lagres i en liste i stigende rekkefølge. Marit skal skrive et program som avgjør for en vilkårlig valgt divisor  $d > 1$  om den er et primtall. La  $n$  ha  $k$  positive divisorer som ikke er større enn  $d$ . Marit hevder at det er tilstrekkelig å undersøke deleligheten av  $d$  med de første  $\lceil k/2 \rceil$  divisorene i  $n$ :  
Hvis en divisor i  $d$  større enn 1 blir funnet blant dem, er  $d$  et sammensatt tall, ellers er  $d$  et primtall. Har Marit rett?  
Merknad:  $\lceil x \rceil$  betyr det minste heltallet større enn eller lik  $x$ .
18. Hvert heltall farges med nøyaktig én av fargene BLÅ, GRØNN, LILLA, RØD.  
Kan dette gjøres på en slik måte at  
hvis  $a, b, c, d$  har samme farge og ikke alle er 0, så er  $3a - 2b \neq 2c - 3d$ ?
19. La  $a$  og  $b$  være positive heltall. Vis at hvis  $a^3 + b^3$  er et kvadrattall, så kan ikke  $a + b$  være produktet av to ulike primtall.
20. La  $n$  være et positivt heltall slik at summen av alle positive divisorer i  $n$  (unntatt  $n$ ) og antallet slike divisorer er lik  $n$ . Vis at  $n = 2m^2$  for et eller annet heltall  $m$ .