Oppgaver til lagkonkurransen Baltic Way

Kjøbenhavn, 9. november 1997, kl. 10.00

$4\frac{1}{2}$ timer. 5 poeng per problem.

1. Bestem alle funksjoner f fra de reelle tall til de reelle tall, forskjellig fra nullfunksjonen, slik at

$$f(x)f(y) = f(x-y)$$

for alle reelle tall x og y.

2. Gitt en følge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ av positive heltall som inneholder ethvert positivt heltall nøyaktig én gang. Vis at det finnes heltall ℓ og m, $1 < \ell < m$, slik at $a_1 + a_m = 2a_\ell$.

3. La $x_1 = 1$ og $x_{n+1} = x_n + \left\lfloor \frac{x_n}{n} \right\rfloor + 2$ for alle $n = 1, 2, 3, \ldots$, hvor $\lfloor x \rfloor$ angir det største heltallet ikke større enn x. Bestem x_{1997}.

4. Vis at det aritmetiske gjennomsnittet a av $x_1, \ldots, x_n$ tilfredsstiller

$$(x_1 - a)^2 + \cdots + (x_n - a)^2 \le \frac{1}{2}(|x_1 - a| + \cdots + |x_n - a|)^2 .$$

5. I en følge $u_0, u_1, \ldots$ av positive heltall er u_0 vilkårlig og for ethvert ikke-negativt heltall n gjelder

$$u_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}u_n & \text{for like } u_n\,, \\ a + u_n & \text{for odde } u_n\,, \end{cases}$$

hvor a er et fiksert positivt odde heltall. Vis at følgen er periodisk fra et visst ledd.

6. Finn alle tripler (a, b, c) av ikke-negative heltall som tilfredsstiller $a \ge b \ge c$ og

$$1 \cdot a^3 + 9 \cdot b^2 + 9 \cdot c + 7 = 1997.$$

7. La P og Q være polynomer med heltallige koeffisienter. Anta at heltallene a og $a + 1997$ er røtter i P, og at $Q(1998) = 2000$. Vis at likningen $Q(P(x)) = 1$ ikke har heltallige løsninger.

8. Hvis vi adderer 1996 og 1997, legger vi først sammen sifrene 6 og 7. Vi får da 13, skriver 3 på svarlinjen og får 1 "i mente". Hvis vi fortsetter ser vi at vi får tall i mente tre ganger:

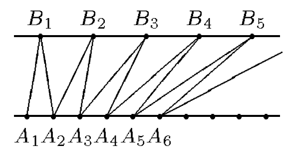
$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1\,1} \\ 1\,9\,9\,6 \\ +\ 1\,9\,9\,7 \\ \hline 3\,9\,9\,3 \end{array}$$

Finnes det et positivt heltall k slik at vi aldri får noe i mente når vi legger sammen $1996 \cdot k$ og $1997 \cdot k$?

9. Verdenene i "Verdenenes Univers" er nummerert $1, 2, 3, \ldots$ og henger sammen slik at for ethvert heltall $n \geq 1$, kan Trollmannen Gandalf reise i begge retninger mellom verdener med nummer n, $2n$ og $3n+1$. Kan han komme til enhver annen verden uansett hvilken verden Gandalf starter i?

10. Vis at i enhver følge av 79 etterfølgende positive heltall skrevet i 10-tallssystemet, så finnes det et positivt heltall slik at tverrsummen er delelig med 13.

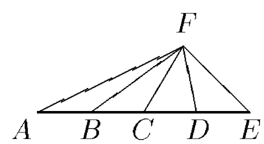
11. Punktene A_1, A_2, $A_3 \ldots$ er markert på en linje slik at $|A_iA_{i+1}| = 1$ for $i = 1, 2, \ldots$. På en parallell linje er punktene B_1, B_2, $B_3 \ldots$ markert slik at $|B_iB_{i+1}| = 2$ for $i = 1, 2, \ldots$ (se figur). Gitt at $\angle A_1A_2B_1 = \alpha$, bestem den uendelige summen



$$\angle A_1B_1A_2 + \angle A_2B_2A_3 + \angle A_3B_3A_4 + \cdots .$$

12. To sirkler $\mathcal{C}_1$ og $\mathcal{C}_2$ skjærer hverandre i punktene P og Q. En linje gjennom P skjærer $\mathcal{C}_1$ og $\mathcal{C}_2$ i to punkter forskjellig fra P, henholdsvis A og B. La X være midtpunktet på AB. Linjen gjennom Q og X skjærer $\mathcal{C}_1$ og $\mathcal{C}_2$ i to punkter forskjellig fra Q, henholdsvis Y og Z. Vis at X er midtpunktet på YZ.

13. Fem forskjellige punkter A, B, C, D og E ligger på ei linje med $|AB| = |BC| = |CD| = |DE|$. Punktet F ligger utenfor linja. La G være sentrum i den omskrevne sirkelen til trekanten ADF og H sentrum i den omskrevne sirkelen til trekanten BEF. Vis at linjene GH og FC står vinkelrett på hverandre.



14. I trekant ABC er $|AC|^2$ lik det aritmetiske gjennomsnittet av $|BC|^2$ og $|AB|^2$. Vis at $\cot^2 B \geq \cot A \cot C$. ($cotv = \frac{cosv}{sinv}$)

15. Vinklene i trekant ABC er spisse. Linjene som halverer $\angle A$, $\angle B$ og $\angle C$ skjærer den omskrevne sirkelen i tre nye punkter, henholdsvis A_1, B_1 and C_1. La M være skjæringspunktet mellom AB og B_1C_1, og la N være skjæringspunktet mellom BC og A_1B_1. Vis at MN passerer gjennom sentrum til den innskrevne sirkelen til trekant ABC.

16. To spillere spiller følgende spill på et 5×5 sjakkbrett: Den første spilleren plasserer en springer (hesten) på et felt. Deretter flytter spillerne etter tur springeren i samsvar med reglene i sjakk, og den andre spilleren flytter først. Det er ikke lov å flytte springeren til et felt den har stått på før. Hvis en spiller ikke kan flytte, har han tapt. Hvilken av de to spillerne har en vinnende strategi?

17. Et rektangel kan deles inn i n like store kvadrater. Det samme rektangelet kan også deles inn i $n+76$ like store kvadrater. Finn n.

18. (i) Vis at det finnes to uendelige mengder A og B, ikke nødvendigvis disjunkte, og som består av ikke-negative heltall, slik at ethvert ikke-negativt heltall n på en entydig måte kan skrives på formen $n = a + b$ med $a \in A$ og $b \in B$.

(ii) Vis at for alle slike par (A,B), så må enten A eller B bare inneholde multipler av et heltall $k > 1$.

19. I en skog bor hvert av n dyr ($n \geq 3$) i hver sin hule, og mellom hvert par av huler finnes det nøyaktig en sti (som ikke går innom andre huler). Før valget på "Kongen over Skogen" foretar en del dyr en valgkampsrunde, kall disse dyrene for kampanje-dyr. Hvert kampanje-dyr starter fra sin egen hule og besøker hver av de andre hulene nøyaktig en gang, bruker kun stiene for å komme fra en hule til en annen, skifter aldri fra en sti til en annen underveis til en hule, og returnerer til sin egen hule når valgkampsrunden er over. Ingen av stiene mellom to huler brukes av mer en ett kampanje-dyr.

a) Dersom n er et primtall, vis at det maksimale antall kampanje-dyr er $\frac{n-1}{2}$;

b) Finn det maksimale antall kampanje-dyr for $n = 9$.

20. Tolv kort ligger på rad. Det finnes tre typer kort: kort med to hvite sider, kort med to svarte sider, og kort med en hvit og en svart side. Ved begynnelsen har 9 av de 12 kortene en svart side opp. Kortene 1-6 blir snudd, og nå har 4 av de 12 kortene en svart side opp. Deretter snus kortene 4-9, og 6 av kortene blir liggende med en svart side opp. Til slutt snus kortene 1-3 og 10-12, som etterlater 5 kort med en svart side opp. Hvor mange kort finnes av hver type?