



## Balti Tee 2009

### Trondheim, 7. november 2009

Aega on 4.5 tundi.

Selgitusi ülesannete kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.

Iga ülesanne on väärt 5 punkti.

1. Polünoomi  $p(x)$  aste on  $n \geq 2$  ning tal on kordsusi arvestades täpselt  $n$  reaalarvulist juurt. Tema pealiikme kordaja on 1, ükski tema juur ei ületa arvu 1 ja  $p(2) = 3^n$ . Leia  $p(1)$  kõik võimalikud väärtused.

2. Mittenegatiivsed täisarvud  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$  rahuldavad võrratust

$$a_1 \cdot (a_1 - 1) \cdot \dots \cdot (a_1 - 20) + a_2 \cdot (a_2 - 1) \cdot \dots \cdot (a_2 - 20) + \dots + a_{100} \cdot (a_{100} - 1) \cdot \dots \cdot (a_{100} - 20) \leq 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot \dots \cdot 79.$$

Tõesta, et  $a_1 + a_2 + \dots + a_{100} \leq 9900$ .

3. On antud positiivne täisarv  $n$ . Näita, et saab valida kordajad  $c_k \in \{-1, 1\}$  ( $1 \leq k \leq n$ ) nii, et

$$0 \leq \sum_{k=1}^n c_k \cdot k^2 \leq 4.$$

4. Leia kõik sellised täisarvud  $n > 1$ , et võrratus

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq (x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1})x_n$$

kehtib mistahes reaalarvude  $x_1, x_2, \dots, x_n$  korral.

5. Olgu  $f_0 = f_1 = 1$  ja  $f_{i+2} = f_{i+1} + f_i$  ( $i \geq 0$ ). Leia võrrandi

$$x^{2010} = f_{2009} \cdot x + f_{2008}$$

kõik reaalarvulised lahendid.

6. Olgu  $a$  ja  $b$  sellised täisarvud, et võrrandil  $x^3 - ax^2 - b = 0$  on kolm täisarvulist juurt. Tõesta, et leiduvad täisarvud  $d$  ja  $k$  nii, et  $b = dk^2$  ning arv  $a$  jagub arvuga  $d$ .

7. Algarv  $p$  ja täisarvud  $a, b, c$  rahuldavad tingimusi

$$6 \mid p + 1, \quad p \mid a + b + c, \quad p \mid a^4 + b^4 + c^4.$$

Tõesta, et  $p \mid a, b, c$ .

8. Leia kõik positiivsed täisarvud  $n$ , mille korral saab arvud

$$n, n + 1, n + 2, \dots, n + 8$$

jaotada kaheks rühmaks nii, et kumbagi rühma kuuluvate arvude korrutised oleksid võrdsed.

9. Leia kõik positiivsed täisarvud  $n$ , mille korral  $2^{n+1} - n^2$  on algarv.

10. Tähistame  $d(k)$  abil täisarvu  $k$  positiivsete jagajate arvu. Tõesta, et leidub lõpmata palju positiivseid täisarve  $M$ , mis ei esitu kujul

$$M = \left( \frac{2\sqrt{n}}{d(n)} \right)^2,$$

kus  $n$  on positiivne täisarv.

11. Kolmnurga  $ABC$  külje  $AC$  keskpunkt on  $M$ . Punkt  $K$  asub kiirel  $BA$ , kusjuures punkt  $A$  asub punktide  $B$  ja  $K$  vahel. Sirge  $KM$  ja külge  $BC$  lõikuvad punktis  $L$ . Punkt  $P$  asub lõigul  $BM$ , kusjuures  $PM$  on nurga  $LPK$  poolitaja. Sirge  $\ell$  läbib punkti  $A$  ning on paralleelne lõiguga  $BM$ . Tõesta, et punkti  $M$  projektsioon sirgele  $\ell$  asub sirgel  $PK$ .

12. Nelinurgas  $ABCD$  on  $AB \parallel CD$  ja  $|AB| = 2|CD|$ . Sirge  $\ell$  on risti küljega  $CD$  ning läbib punkti  $C$ . Ringjoon keskpunktiga  $D$  ja raadiusega  $|DA|$  lõikab sirget  $\ell$  punktides  $P$  ja  $Q$ . Tõesta, et  $AP \perp BQ$ .

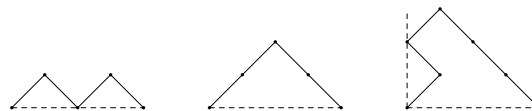
13. Kolmnurga  $ABC$  kõrgused  $AD, BE, CF$  lõikuvad punktis  $H$ . Kolmnurkade  $EHF, FHD, DHE$  siseringjoonte keskpunktid on vastavalt  $I_1, I_2, I_3$ . Tõesta, et sirged  $AI_1, BI_2, CI_3$  lõikuvad ühes punktis.

14. Milliste  $n \geq 2$  korral leidub  $n$  paarikaupa mittesarnast kolmnurka  $A_1, A_2, \dots, A_n$  nii, et mistahes neist võib tükeldada  $n$  paarikaupa mittesarnaseks kolmnurgaks, millest igaüks on sarnane ühega kolmnurkadest  $A_1, A_2, \dots, A_n$ ?

15. Ühikruut on jagatud  $m$  nelinurgaks  $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$ . Olgu  $S_i$  nelinurga  $Q_i$  külgede ruutude summa ( $i = 1, 2, \dots, m$ ). Tõesta, et

$$S_1 + S_2 + \dots + S_m \geq 4.$$

16. Nimetame *trõnd- $n$ -konnaks* teekonda, mis algab punktis  $(0, 0)$ , lõpeb punktis  $(2n, 0)$ , ei lõika iseennast, ei välju koordinaattasandi esimesest veerandist, ning mille iga samm on üks vektoritest  $(1, 1)$ ,  $(1, -1)$  ja  $(-1, 1)$ . (Joonisel on kujutatud kõikvõimalikud trõnd-2-konnad).



Leia trõnd- $n$ -kondade arv.

17. Leia suurim täisarv  $n$ , mille korral leidub  $n$  erinevat täisarvu, millest ükski ei jagu arvuga 7, 11 ega 13, kuid mistahes kahe arvu summa jagub vähemalt ühega arvudest 7, 11 ja 13.

18. Olgu  $n > 2$  täisarv, linnade arv riigis. Iga kahe linna vahel on maantee, millele on omistatud täisarv hulgast  $\{1, 2, \dots, m\}$  (eri maanteedele võib omistada sama arvu). Linna *prioriteediks* nimetatakse temast väljuvatele maanteedele omistatud arvude summat. Leia vähim  $m$ , mille korral on võimalik, et kõigil linnadel on erinev prioriteet.

19. Peol on kaheksa inimest. Mistahes kaks neist kas tunnevad teineteist või ei tunne. Igal inimesel on täpselt kolm tuttavat. Kas järgmised kaks tingimust saavad olla samaaegselt täidetud:

- mistahes kolme inimese seas leidub kaks, kes teineteist ei tunne;
- mistahes nelja inimese seas leidub kaks, kes teineteist tunnevad?

20. Ühes Läänemere-maa linnas on 16 haiglat. Igal ööl on täpselt neli haiglat valves. Kas leidub selline graafik, et 20 öö järel on iga haiglate paar olnud koos valves täpselt ühel ööl?