ABEL KONKURRANSEN

Niels Henrik Abels matematikkonkurranse

2. desember 2014

En vrien kombinatorikkoppgave i Abelkonkurransens første runde 2014/2015

Oppgave 10 *i første runde i årets konkurranse har vist seg vanskelig å tolke slik vi hadde tenkt oss. Vi har fått en del henvendelser om oppgaven, og dette er et forsøk på et svar. Oppgaveteksten er gjengitt og fortolket nedenfor.*

Den blå stemmen er vårt forsøk på å forklare og/eller argumentere for vår tolkning.

Den røde stemmen er kritisk og spørrende.

Oppgave 10: Arne har en eske med 100 brikker i de fire fargene rødt, hvitt, blått og sort.

Det er 100 brikker til sammen i esken. Hver av dem har én av de fire fargene.

Han forteller Berit at hun må trekke minst 81 brikker fra esken for å være sikker på å få minst én av hver farge, om hun trekker dem i blinde.

Arne vet hvor mange brikker det finnes av hver farge, og det han forteller Berit er sant ut fra hva han vet. Om Berit trekker 80 eller færre brikker uten å se på fargen i det hun trekker dem, kan det hende at hun bare trekker brikker med tre eller færre farger. Men om hun trekker 81 brikker, er hun garantert å få minst én brikke av hver farge.

Har ikke Arne rett i det han sier, selv om det for eksempel er nødvendig å trekke 82 brikker for å få en av hver farge?

Det kan hende, men som vi kommer til å se, endrer det ikke på resultatet, og samme resonnement kan brukes for begge tolkninger

Etter å ha tenkt seg om, konkluderer Berit helt korrekt …

Berit har gjennomført et *logisk resonnement* basert på det Arne har fortalt henne, og hun har *resonnert korrekt*.

Kan det ikke tenkes at Berit resonnerte feil, eller at hun bare gjettet, men at svaret likevel var korrekt, basert på det faktiske innholdet i eskene?

Formuleringen «etter å ha tenkt seg om» var ment å tydeliggjøre at det dreier seg om et *korrekt resonnement*, ikke en heldig gjetning. Å tenke det sistnevnte virker unaturlig, men tolkningen kan ikke utelukkes strengt logisk.

… at esken inneholder minst N brikker av hver farge, men høyst M stykker av hver.

Hun sa ikke «N» og «M», men to faktiske tall. Bokstavene N og M står her for de tallene Anne faktisk nevnte, og de må derfor være resultat av hennes *korrekte* resonnement.

Hva er minste mulige verdi for $M - N$?

Det betyr at vi må finne den minste M og den største N som passer til historien som er fortalt, og regne ut differansen mellom de to.

Kan det ikke tenkes at minste mulige verdi for M avhenger av N, og at den største mulige verdi for N avhenger av M?

Jo, i utgangspunktet kan vel det tenkes. Men løsningen vil vise at det ikke er noe problem.

Detaljert løsning

Hvis det er minst 20 brikker av hver farge, er det ikke mulig å trekke 81 av de 100 brikkene uten å få minst én brikke av hver farge. Men om det er 19 eller færre brikker av en gitt farge, er det mulig. Så det må være minst 20 brikker av hver farge.

Det er også mulig å trekke 80 brikker uten å få alle fargene, derfor må det være høyst $100 - 80 = 20$ brikker av én av fargene.

Vi konkluderer at én farge forekommer nøyaktig 20 ganger, og alle andre farger minst 20 ganger. Altså er $N \leq 20$, for ellers har Berit resonnert feil.

For hver farge er det minst 20 brikker av hver av de tre andre fargene, til sammen $3 \cdot 20 = 60$ brikker, så det er høyst $100 - 60 = 40$ brikker av hver farge.

Berits konklusjon er riktig hvis og bare hvis $M \geq 40$ og $N \leq 20$, og det gir at minste mulige verdi for $M - N$ er $40 - 20 = 20$.

> Dersom $M > 40$ eller $N < 20$, har ikke Berit resonnert feil, hun har bare ikke trukket den beste konklusjonen hun kunne.

Hva skjer om vi tolker oppgaven annerledes?

Men hva om vi tolker Arnes utsagn svakere? Altså *kun* at det kan finnes et utvalg på 80 brikker som tilsammen ikke har alle fire fargene?

I så fall kan Berit bare konkludere at minst én farge bare er på ≤ 20 brikker. Hvis vi tolker oppgaven slik at hver farge forekommer på minst én brikke, er $N = 1$ og $M = 97$ det beste hun kan komme til, med $M - N = 96$. Uten denne antagelsen kan hun ikke få annet enn $N = 0$ og $M = 100$, med $M - N = 100$.

Men omvendt, da? Arne garanterer at et hvilket som helst utvalg av 81 brikker må ha alle fire fargene, men han utelukker ikke at et utvalg på 80 *også* er tilstrekkelig til å garantere fire farger?

Det er en svært urimelig tolkning. Når han sier at du må trekke minst 81 brikker for å garantere et gitt utfall, så er det klart at det ikke finnes noen slik garanti om du trekker 80 brikker.

Men la oss se hva som skjer om vi tolker oppgaven slik: Nå kan vi (og Berit) konkludere at det er minst 20 brikker av hver farge, men vi vet ikke lenger sikkert at noen farge må finnes på eksakt 20 brikker. Men vi kan heller ikke utelukke den muligheten, så alt vi kan si er at $N \leq 20$, hvis ikke Berit har resonnert feil. På samme måte som før får vi at det ikke er mer enn 40 brikker av hver farge, så $M \geq 40$, hvis Berit har resonnert riktig. Nok en gang er minste verdi på $M - N$ lik $40 - 20 = 20$, så denne tolkningen gir samme resultat som før.

Jeg tror ikke at Berit resonnerte seg frem, men at hun gjettet, og var heldig og kom til riktig resultat ut fra det faktiske innholdet i esken.

Det var ikke slik vi hadde tenkt det, men la oss likevel se hvor denne tolkningen leder hen.

Vi antar igjen at innholdet i esken er slik at ethvert utvalg på 81 brikker gir alle fire fargene, mens det finnes et utvalg på 80 brikker som bare gir tre av de fire fargene. Da vet vi, som før, at én farge finnes på eksakt 20 brikker, mens de andre fargene finnes på minst 20 brikker hver. Så $N \leq 20$, ellers er Berits utsagn feil. Vi kan også konkludere, som før, at ingen farge finnes på mer enn 40 brikker. I den motsatte ytterligheten kan fargene være fordelt mest mulig jevnt, altså 20, 26, 26 og 27. I dette tilfellet kunne Berit ha rett med $M = 27$, og slik blir minste mulige verdi for $M - N$ lik $27 - 20 = 7$.

Konklusjon

Etter vårt skjønn er de to første alternative tolkningene ovenfor urimelige, nummer to sågar *svært* urimelig.

Den siste tolkningen er kanskje ikke så urimelig, men vi mener likevel at det ikke er gode holdepunkter for den tolkningen i teksten. Setningselementene *etter å ha tenkt seg om*, *konkluderte* og *helt korrekt* burde være mer enn tilstrekkelig til å gjøre det klart at vi snakker om et logisk resonnement, og grunnlaget for og gyldigheten av det *uavhengig av det faktiske inndholdet i esken*, i vel så stor grad som konklusjonen.

Når dét er sagt, skal vi likevel innrømme at oppgaven kunne være vrien å tolke etter vår intensjon, og det er klart en stor svakhet ved oppgaven slik den er formulert.

Det er et faktum at kombinatorikkoppgaver kan være notorisk vanskelige å formulere slik at de ikke kan misforstås. Lærdommen vi trekker av dette, er at vi må bearbeide slike oppgaver grundigere enn vi gjorde denne gangen.