

Abel-konkurransen 2004–2005

FINALE - 10. mars 2005

Tid: 4 timer

På hver oppgave gis det inntil 10 poeng

Oppgave 1

a) Et positivt heltall m kalles et *trekantttall* dersom $m = 1 + 2 + \dots + n$, for et heltall n . Vis at et positivt heltall m er et trekantttall hvis og bare hvis $8m + 1$ er kvadratet av et heltall.

b) I en pyramide er grunnflaten en rettvinklet trekant med heltallige sider. Høyden i pyramiden er også heltallig. Vis at volumet av pyramiden er et partall.

Oppgave 2

a) I et akvarium er det ni småfisk. Akvariet er terningformet med sidelengde to meter, og er helt fullt med vann. Vis at det til enhver tid er mulig å finne to småfisk med avstand mindre enn $\sqrt{3}$ meter.

b) La A være mengden av alle punkter med heltallige koordinater i et tredimensjonalt koordinatsystem. Vi tenker oss at ni vilkårlige punkter i A blir farget blå. Vis at vi alltid kan finne to blå punkter slik at linjestykket mellom dem inneholder minst ett punkt fra A .

Oppgave 3

a) I den likebeinte trekanten $\triangle ABC$ er $AB = AC$. La D være midtpunktet på linjestykket BC . Punktene P og Q ligger henholdsvis på linjestykkene AD og AB (med $Q \neq B$) slik at $PQ = PC$. Vis at $\angle PQC = \frac{1}{2}\angle A$.

b) I parallelogrammet $ABCD$ er alle sidene like lange, og $\angle A = 60^\circ$. La F være et punkt på linjestykket AD , H et punkt på linjestykket DC og G et punkt på diagonalen AC , slik at $DFGH$ er et parallelogram. Vis at da er $\triangle BHF$ likesidet.

Oppgave 4

a) Vis at for alle positive reelle tall a , b og c , gjelder ulikheten

$$(a + b)(a + c) \geq 2\sqrt{abc(a + b + c)}.$$

b) La a , b og c være reelle tall slik at $ab + bc + ca > a + b + c > 0$. Vis at da er

$$a + b + c > 3.$$