



Nynorsk

## Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2013–2014

Finale 4. mars 2014

I finalen i Abelkonkurransen er det fire oppgåver (seks punkt) som skal løysast på fire timar. Svara skal grunnrivast og først på egne ark. **Begynn på nytt ark for kvar av dei fire oppgåvene.**

Du får opptil 10 poeng på kvar oppgåve. Maksimal poengsum er såleis 40.

Ingen andre hjelpemiddel enn kladdepapir, skrivereiskapar og tospråklege ord-bøker er tillatne.

### Oppgåve 1

a. Anta at  $x, y \geq 0$ . Vis at

$$x^2 + y^2 + 1 \leq \sqrt{(x^3 + y + 1)(y^3 + x + 1)}.$$

b. Finn alle funksjonar  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  som er slik at

$$(1 + y)f(x) - (1 + x)f(y) = yf(x/y) - xf(y/x)$$

for alle reelle  $x, y \neq 0$ , og som har verdiane  $f(1) = 32$  og  $f(-1) = -4$ .

### Oppgåve 2

Punkta  $P$  og  $Q$  ligg på sidene  $BC$  og  $CD$  i parallelogrammet  $ABCD$  slik at  $BP = QD$ . Vis at skjeringspunktet mellom linjene  $BQ$  og  $DP$  ligg på vinkelhalveringslinja til  $\angle BAD$ .

### Oppgåve 3

a. Ei grashoppe hoppar rundt på eit rutenett. Frå punktet med koordinatar  $(a, b)$  kan ho hoppe til anten  $(a + 1, b)$ ,  $(a + 2, b)$ ,  $(a + 1, b + 1)$ ,  $(a, b + 2)$  eller  $(a, b + 1)$ . Grashoppa startar i  $(0, 0)$ . På kor mange måtar kan ho nå linja  $x + y = 2014$ ?

b. Ni punkt er plasserte på ein sirkel. Vis at det er mulig å farge dei 36 kordane som bind dei saman ved hjelp av fire fargar slik at for eitkvart utval av fire punkt er kvar av dei fire fargane brukt for minst éin av dei seks kordane som bind saman dei utvalgte punkta.

### Oppgåve 4

Finn alle trippel  $(a, b, c)$  av positive heiltal som er slik at  $\frac{32a + 3b + 48c}{4abc}$  også er eit heiltal.