

Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2014–2015

Finale 17. mars 2015

Abelkonkurransens finale består av fire oppgaver (sju punkter) som skal løses i løpet av fire timer. Svarene skal begrunnes og føres på egne ark. **Begynn på nytt ark for hver av de fire oppgavene.**

Du får opptil 10 poeng på hver oppgave. Maksimal poengsum er dermed 40.

Ingen andre hjelpemidler enn kladdepapir, skriveredskaper og tospråklige ordbøker er tillatt.

Oppgave 1

a. Bestem alle tripler $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ som oppfyller ligningene

$$x^2 + 4y^2 = 4zx,$$

$$y^2 + 4z^2 = 4xy,$$

$$z^2 + 4x^2 = 4yz.$$

b. Bestem alle funksjoner $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ slik at

$$x^2 f(yf(x)) = y^2 f(x) f(f(x))$$

for alle reelle tall x og y .

Oppgave 2

a. Kong Arthur skal plassere $a + b + c$ riddere rundt et bord. a riddere er kledd i rødt, b riddere er kledd i brunt, og c riddere er kledd i oransje.

Arthur vil gjerne plassere ridderne slik at ingen av dem sitter ved siden av en ridder kledd i samme farge som ham selv. Vis at det er mulig hvis, og bare hvis, det finnes en trekant med sidelengder $a + \frac{1}{2}$, $b + \frac{1}{2}$ og $c + \frac{1}{2}$.

b. Nils spiller et spill med en pose som opprinnelig inneholder n røde og én svart kule. Han starter med en formue lik 1.

I hvert trekk velger han et reelt tall x med $0 \leq x \leq y$, der hans nåværende formue er lik y . Så trekker han en kule fra posen. Hvis kulen er rød, øker formuen med x , men hvis den er svart, minker den med x . Spillet er slutt etter n trekk, når det er bare en kule igjen.

I hvert trekk velger Nils x slik at han sikrer seg en sluttformue større eller lik Y . Hva er største mulige verdi for Y ?

Oppgave 3

De fem sidekantene i en regulær femkant forlenges til linjer ℓ_1 , ℓ_2 , ℓ_3 , ℓ_4 og ℓ_5 . Skriv d_i for avstanden fra et punkt P til ℓ_i . For hvilke(t) punkt i det indre av femkanten er produktet $d_1d_2d_3d_4d_5$ maksimalt?

Oppgave 4

- a. Bestem alle ikke-negative heltall x og y slik at $3^x + 7^y$ er et kvadrattall og y er et partall.
- b. Bestem alle ikke-negative heltall x og y slik at $3^x + 7^y$ er et kvadrattall og y er et oddetall.