Baltic Way 2002 lagkonkurranse i matematikk

Norwegian version

Tartu, 2. november 2002

Tid: 4,5 timer.
Spørsmål kan stilles de første 30 minuttene.

1. Finn alle reelle løsninger av følgende likningssystem.

$$\begin{cases} a^3 + 3ab^2 + 3ac^2 - 6abc = 1 \\ b^3 + 3ba^2 + 3bc^2 - 6abc = 1 \\ c^3 + 3ca^2 + 3cb^2 - 6abc = 1 \end{cases}$$

2. La a, b, c, d være reelle tall slik at

$$a + b + c + d = -2 ,$$
$$ab + ac + ad + bc + bd + cd = 0 .$$

Vis at minst ett av tallene a, b, c, d ikke er større enn -1.

3. Finn alle følger $a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots$ av reelle tall slik at

$$a_{m^2+n^2} = a_m^2 + a_n^2$$

for alle heltall $m, n \geqslant 0$.

4. La n være et positivt heltall. Vis at

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(1 - x_i)^2 \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$$

for alle ikkenegative reelle tall $x_1, x_2, \dots, x_n$ som er slik at $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$.

5. Finn alle par (a, b) av positive, rasjonale tall slik at

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2 + \sqrt{3}} .$$

6. Det er gitt et $m \times n$ sjakkbrett hvor $m, n \geqslant 2$. Først plasseres et tårn på et av feltene. For hvert trekk kan tårnet flyttes et vilkårlig antall ruter horisontalt eller vertikalt, med den betingelse at hvert trekk må foretas i en retning rotert 90° med klokka i forhold til forrige trekk. (Så hvis tårnet flyttes mot venstre i et trekk, må det flyttes oppover i neste trekk, og mot høyre trekket deretter.) For hvilke m og n er det mulig for tårnet å besøke hvert felt nøyaktig en gang og returnere til utgangspunktet? (Tårnet besøker kun de feltene det stopper på, ikke de feltene det hopper over.)

7. Vi tegner n konvekse firkanter i planet. De deler opp planet i disjunkte områder. (Et av områdene er uendelig stort.) Bestem det største mulige antall slike områder.

8. La P være en mengde med $n \geqslant 3$ punkter i planet, slik at ingen utvalg av tre punkter ligger på linje. Hvor mange muligheter finnes det for å velge en mengde T bestående av $\binom{n-1}{2}$ trekanter, slik at alle trekantenes hjørner ligger i P, og slik at hver trekant i T har en side som ikke er felles med noen annen trekant i T?

9. To tryllekunstnere utfører følgende triks. Den ene tryllekunstneren forlater rommet. Den andre tar en bunke med 100 kort som er nummerert fra 1 til 100, og ber tre tilskuere om etter tur å velge et kort hver. Tryllekunstneren ser hvilke kort tilskuerne trekker, og han velger deretter et kort fra bunken selv. Tilskuerne stokker de fire valgte kortene, roper på den første tryllekunstneren, og gir ham de fire kortene. Den første tryllekunstneren ser på kortene og "gjetter" hvilket kort som ble valgt av den første tilskueren, hvilket som ble valgt av den andre og hvilket som ble valgt av den tredje. Vis at det er mulig for tryllekunstnerne å gjennomføre trikset.

10. La N være et positivt heltall. To personer spiller følgende spill. Den første skriver ned en liste med positive heltall, ikke nødvendigvis forskjellige og ingen større enn 25, slik at summen er minst lik 200. Den andre spilleren vinner dersom han kan velge noen av disse tallene slik at deres sum S oppfyller betingelsen $200 - N \leqslant S \leqslant 200 + N$. Finn den minste N slik at den andre spilleren har en vinnende strategi.

11. La n være et positivt heltall. Betrakt n punkter i planet slik at ingen tre av punkter ligger på linje og ingen to av avstandene er like. For hvert punkt trekker vi et linjestykke fra punktet til de to nærmeste punktene. (Hvis det allerede er andre linjestykker til punktet, så sletter vi *ikke* disse.) Vis at det ikke finnes noe punkt som er endepunkt for mer enn 11 forskjellige linjestykker. (Et linjestykke har to endepunkter.)

12. Mengden S inneholder fire punkter i planet. For hvert punkt $X \in S$ kan vi gi de resterende tre punktene navn Y, Z og W slik at

$$|XY| = |XZ| + |XW|.$$

Vis at de fire punktene ligger på linje.

13. La $\triangle ABC$ være en spissvinklet trekant med $\angle BAC > \angle BCA$, og la D være et punkt på AC slik at $|AB| = |BD|$. La videre F være et punkt på den omskrevne sirkelen til $\triangle ABC$ slik at FD står vinkelrett på BC, og punktene F og B ligger på hver sin side av AC. Vis at FB står vinkelrett på AC.

14. Det er gitt en trekant $\triangle ABC$. La L, M and N være punkter på sidene AC, AB og BC, henholdsvis, slik at BL halverer $\angle ABC$ og linjestykkene AN, BL og CM har et felles punkt. Hvis $\angle ALB = \angle MNB$, vis at $\angle LNM = 90^\circ$.

15. En edderkopp og en flue sitter på en kube (terning). Fluen ønsker å maksimere den korteste veien til edderkoppen langs overflaten til kuben. Er det nødvendigvis best for fluen å befinne seg på det motsatte punktet i forhold til edderkoppen? (Motsatt betyr symmetrisk med hensyn på kubens sentrum.)

16. Finn alle ikkenegative heltall m slik at

$$a_m = \left(2^{2m+1}\right)^2 + 1$$

er delelig med høyst to forskjellige primtall.

17. Vis at tallfølgen

$$\binom{2002}{2002}, \binom{2003}{2002}, \binom{2004}{2002}, \dots,$$

er periodisk modulo 2002.

18. Finn alle heltall $n > 1$ slik at enhver primdivisor i $n^6 - 1$ også er en divisor i $(n^3 - 1)(n^2 - 1)$.

19. La n være et positivt heltall. Vis at likningen

$$x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3n$$

ikke har løsninger blant de positive, rasjonale tallene.

20. Finnes det en uendelig, ikke-konstant aritmetisk følge, der hvert tall er på formen a^b hvor a og b er positive heltall og $b \geqslant 2$?