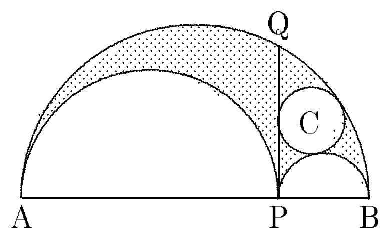
Baltic Way 1996

Oppgave 1

La α være vinkelen mellom to linjer som inneholder to ikke-parallelle diagonaler til en regulær 1996-kant. La β være en annen slik vinkel. Vis at α/β er et rasjonalt tall. (En diagonal forbinder to hjørner som ikke er naboer.)

Oppgave 2

Figuren nedenfor viser tre halvsirkler med diametere AP, PB, og AB henholdsvis Sirkelen C tangerer to av halvsirklene og linjen PQ som står normalt på AB. Arealet av det skraverte området er 39π, og arealet av sirkelen C er 9π. Finn lengden av diameteren AB.



Oppgave 3

La $ABCD$ være et kvadrat med sidelengde 1, og la P og Q være punkter i planet slik at Q er sentrum i den omskrevne sirkelen til trekanten BPC og D er sentrum i den omskrevne sirkelen til trekanten PQA. Finn alle mulige verdier for lengden av linjestykket PQ.

Oppgave 4

$ABCD$ er et trapes ($AD \parallel BC$). P er et punkt på linjen AB slik at $\angle CPD$ har størst mulig verdi. Q er et punkt på linjen CD slik at $\angle BQA$ has størst mulig verdi. Gitt at P ligger på linjestykket AB, vis at $\angle CPD = \angle BQA$.

Oppgave 5

La $ABCD$ være en konveks firkant innskrevet i en sirkel, og la r_a, r_b, r_c, r_d være radiene i de innskrevne sirklene til trekantene BCD, ACD, ABD og ABC henholdsvis. Vis at $r_a + r_c = r_b + r_d$.

Oppgave 6

La a, b, c, d være positive heltall slik at $ab = cd$. Vis at $a + b + c + d$ ikke er et primtall.

Oppgave 7

En følge $\{a_1, a_2, \ldots\}$ av hele tall er slik at $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, og for $n \geq 1$ gjelder

$$a_{n+2} = \begin{cases} 5a_{n+1} - 3a_n, & \text{hvis } a_n \cdot a_{n+1} \text{ er et partall} \\ a_{n+1} - a_n, & \text{hvis } a_n \cdot a_{n+1} \text{ er et oddetall.} \end{cases}$$

Vis at for alle n er $a_n \neq 0$.

Oppgave 8

Betrakt følgen

$$x_1 = 19, \quad x_2 = 95, \quad x_{n+2} = \operatorname{lcm}(x_{n+1}, x_n) + x_n$$

for $n > 1$, der $\operatorname{lcm}(a, b)$ er minste felles multiplum til a og b. Finn største felles divisor til x_{1995} og x_{1996}.

Oppgave 9

La n og k være hele tall, $1 < k \leq n$. Finn et heltall b og en mengde A med n distinkte heltall slik at følgende betingelser er oppfylt: (i) Ingen produkter av $k-1$ distinkte elementer fra A er delelig med b. (ii) Alle produkter av k distinkte elementer fra A er delelig med b. (iii) For alle distinkte a, a' i A vil a ikke dele a'.

Oppgave 10

La $d(n)$ være antall distinkte positive divisorer til et positivt heltall n (inkludert 1 og n). La $a > 1$ og $n > 0$ være hele tall slik at $a^n + 1$ er et primtall. Vis at

$$d(a^n - 1) \geq n \ .$$

Oppgave 11

Reelle tall $x_1, x_2, \ldots, x_{1996}$ tilfredsstiller følgende egenskap: for hvert polynom W av grad 2 er minst tre av tallene $W(x_1), W(x_2), \ldots, W(x_{1996})$ like. Vis at minst tre av tallene $x_1, x_2, \ldots, x_{1996}$ er like.

Oppgave 12

La S være en mengde heltall som inneholder tallene 0 og 1996. Anta videre at enhver heltallig rot i et polynom (forskjellig fra 0) med koeffienter fra S også er med i S. Vis at -2 er med i S.

Oppgave 13

Betrakt funksjonene f definert på mengden av de hele tall som er slik at

$$f(x) = f(x^2 + x + 1),$$

for alle heltallige x. Finn a) alle jevne funksjoner, b) alle odde funksjoner av denne typen.

Oppgave 14

Grafen til fuksjonen $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ $(n > 1)$, snitter linjen $y = b$ i punktene B_1, B_2, $\ldots$, B_n (fra høyre mot venstre), og linjen $y = c$ $(c \neq b)$ i punktene C_1, C_2, $\ldots$, C_n (fra høyre mot venstre). La P være et punkt på linjen $y = c$ til høyre for punktet C_n. Beregn summen

$$\cot(\angle B_1C_1P) + \cdots + \cot(\angle B_nC_nP).$$

Oppgave 15

For hvilke positive reelle tall a, b vil ulikheten

$$x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + \cdots + x_{n-1} \cdot x_n + x_n \cdot x_1 \geq x_1^a \cdot x_2^b \cdot x_3^a + x_2^a \cdot x_3^b \cdot x_4^a + \cdots + x_n^a \cdot x_1^b \cdot x_2^a$$

holde for alle heltall $n > 2$ og alle positive reelle tall $x_1, \cdots, x_n$?

Oppgave 16

To spillere markerer etter tur en umarkert rute på et uendelig rutenett. Den ene bruker $\times$, den andre $\circ$. Den som først fyller et 2×2 kvadrat med egne symboler vinner. Kan den spilleren som begynner alltid vinne?

Oppgave 17

Ved å bruke hver av de åtte sifrene 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8 and 9 nøyaktig en gang kan man danne et tresifret tall A, to tosifrede tall B og C, $B < C$, og et ensifret tall D. Tallene er slik at $A + D = B + C = 143$. På hvor mange måter kan dette gjøres?

Oppgave 18

Juryen i en olympiade har opprinnelig 30 medlemmer. Hvert medlem av juryen mener at minst en av kollegaene er kompetent, mens alle de andre ikke er det, og denne oppfatningen endrer seg ikke. Ved begynnelsen av hver sesjon er det en avstemning, og de medlemmene som av mer enn halvparten av de øvrige ikke anses som kompetente blir ekskludert fra juryen. Vis at det etter høyst 15 sesjoner ikke bli fler eksklusjoner.

Oppgave 19

Fire hauger inneholder henholdsvis 38, 45, 61 og 70 pinner. To spillere velger etter tur to av haugene og fjerner et positivt antall pinner fra den ene haugen, og et positivt antall pinner fra den andre haugen. Den spilleren som ikke kan utføre et trekk taper. Hvem av spillerne har en vinnende strategi?

Oppgave 20

Er det mulig å dele inn de positive heltall i to disjunkte delmengder A og B slik at

(i) tre tall fra A aldri danner en aritmetisk følge

(ii) ingen uendelig ikke-konstant aritmetisk følge kan formes av tall i B?