Baltic Way 99

Reykjavík, 6. november 1999

Oppgave 1

Finn alle reelle tall a, b, c, d som tilfredsstiller likningssystemet

$$\begin{aligned} abc + ab + bc + ca + a + b + c &= 1 \\ bcd + bc + cd + db + b + c + d &= 9 \\ cda + cd + da + ac + c + d + a &= 9 \\ dab + da + ab + bd + d + a + b &= 9 \end{aligned}$$

Oppgave 2

Finn alle positive heltall n slik at tredjeroten av n oppnås ved å fjerne de tre siste sifrene i n.

Oppgave 3

Finn alle positive heltall $n \geq 3$ slik at ulikheten

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n + a_na_1 \leq 0$$

holder for alle reelle tall a_1, a_2, $\ldots$, a_n som tilfredsstiller $a_1 + \cdots + a_n = 0$.

Oppgave 4

For alle positive reelle tall x og y definerer vi

$$f(x, y) = \min\Big(x, \frac{y}{x^2 + y^2}\Big).$$

Vis at det finnes x_0 og y_0 slik at $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ for alle positive x og y, og finn $f(x_0, y_0)$.

Oppgave 5

Punktet (a, b) ligger på sirkelen $x^2+y^2 = 1$. Tangenten til sirkelen i dette punktet møter parabelen $y = x^2 + 1$ i nøyaktig ett punkt. Finn alle slike punkter (a, b).

Oppgave 6

Hva er det minste antall trekk en springer trenger for å flytte fra ett hjørne til det diagonalt motsatte hjørnet på et $n \times n$ sjakkbrett, der $n \geq 4$?

Oppgave 7

To ruter på et 8×8 sjakkbrett kalles naboer dersom de har en felles kant eller et felles hjørne. Er det mulig for en konge å starte på en rute og gå innom alle rutene nøyaktig en gang slik at følgende betingelse er tilfredsstilt: For alle trekk unntatt det første flyttes kongen til en rute som er nabo til et jevnt antall ruter som allerede er besøkt.

Oppgave 8

Det er gitt 1999 mynter som alle har forskjellig vekt. En maskin kan i en operasjon avgjøre hvilken av tre mynter som har den midterste vekten. Vis at man kan finne den 1000. tyngste mynten ved ikke mer enn 1 000 000 operasjoner. Vis også at dette er den eneste mynten som kan rangeres med hensyn på vekt ved å bruke denne maskinen.

Oppgave 9

En terning med sidelengde 3 er inndelt i 27 mindre terninger, alle med sidelengde 1. Tallene $1, 2, \ldots, 27$ er plassert inne i de små terningene med ett tall i hver terning. Vi betrakter nå de 27 rad-summene (det er ni slike summer av tre tall for hver av de tre retningene parallelle med kantene i den store terningen). Av de 27 rad-summene, hva er det maksimalt mulige antall odde summer?

Oppgave 10

Betrakt mengden av punkter på eller innenfor en sirkel med radius 1. Kan denne mengden skrives som en disjunkt union av tre delmengder slik at ingen av delmengdene inneholder to punkter med avstand 1?

Oppgave 11

Anta det er gitt fire punkter i planet slik at det ikke finnes tre som ligger på linje. Vis at det finnes en sirkel som går gjennom tre av punktene og slik at det fjerde punktet enten er på eller innenfor sirkelen.

Oppgave 12

I trekanten ABC er det gitt at $2AB = AC + BC$. La I og O være sentrene for henholdsvis den innskrevne og den omskrevne sirkelen til ABC. La videre P og Q være midtpunktene til henholdsvis AC og BC. Vis at punktene I, O, P og Q ligger på en sirkel.

Oppgave 13

Halveringslinjene til vinklene A og B i trekanten ABC møter sidene BC og CA i henholdsvis D og E. Dersom $AE + BD = AB$, hva er da $\angle C$?

Oppgave 14

La ABC være en likebent trekant med $AB = AC$. Punktene D og E ligger henholdsvis på sidene AB og AC. Linjen gjennom B parallell med AC skjærer forlengelsen av DE i F. Linjen gjennom C parallell med AB skjærer forlengelsen av DE i G. Vis at

$$\frac{[DBCG]}{[FBCE]} = \frac{AD}{AE},$$

der $[PQRS]$ betegner arealet av firkanten $PQRS$.

Oppgave 15

La ABC være en trekant med $\angle C = 60^\circ$ og $AC < BC$. Punktet D ligger på siden BC slik at $BD = AC$. Siden AC forlenges til et punkt E slik at $AC = CE$. Vis at $AB = DE$.

Oppgave 16

Finn det minste positive heltall k som kan skrives på formen $k = 19^n - 5^m$, der m og n er positive heltall.

Oppgave 17

Finnes det en endelig følge av heltall $c_1, \ldots, c_n$ slik at tallene $a + c_1, \ldots, a + c_n$ alle er primtall for minst to, men ikke uendelig mange, forskjellige heltall a?

Oppgave 18

La m være et positivt heltall slik at $m \equiv 2 \pmod 4$. Vis at det finnes høyst en faktorisering $m = ab$, der a og b er positive heltall som tilfredsstiller $0 < a - b < \sqrt{5 + 4\sqrt{4m+1}}$.

Oppgave 19

Vis at det finnes uendelig mange jevne, positive heltall k med følgende egenskap: For alle primtall p er $p^2 + k$ ikke et primtall.

Oppgave 20

La a, b, c og d være primtall slik at $a > 3b > 6c > 12d$ og $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 1749$. Bestem alle mulige verdier av $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.