12. juli 2006

Oppgave 1. La ABC være en trekant med innsenter I. Et punkt P ligger på innsiden av trekanten og tilfredsstiller

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Vis at $AP \geq AI$, og at likhet gjelder hvis og bare hvis $P = I$.

Oppgave 2. La P være en regulær 2006-kant. En diagonal i P kalles for *god* hvis endepunktene deler omkretsen til P i to deler, hver av dem bestående av et odde antall kanter av P. Sidene i P kalles også *gode*.

P deles opp i trekanter av 2003 diagonaler, av hvilke ingen to har felles punkt innenfor P. Finn det maximale antallet likebente trekanter med to gode sider som kan oppnås ved en slik oppdeling.

Oppgave 3. Bestem det minste reelle tallet M slik at ulikheten

$$\left| ab(a^2-b^2) + bc(b^2-c^2) + ca(c^2-a^2) \right| \leq M\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$$

holder for alle reelle tall a, b og c.

Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter
Hver oppgave er verdt 7 poeng

13. juli 2006

Oppgave 4. Bestem alle par av heltall (x, y) slik at

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Oppgave 5. La $P(x)$ være et polynom av grad $n > 1$ med heltallige koeffisienter, og la k være et positivt heltall. Betrakt polynomet $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, med P skrevet k ganger. Vis at det finnes høyst n forskjellige heltall t slik at $Q(t) = t$.

Oppgave 6. Til hver side b av et konvekst polygon P tilegnes det maksimale arealet av trekanter inneholdt i P og med b som en av sidene. Vis at summen av disse tilegnede arealene er minst det dobbelte av arealet til P.

Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter
Hver oppgave er verdt 7 poeng