Onsdag 15. juli 2009

Oppgave 1. La n være et positivt heltall, og la $a_1, \ldots, a_k$ $(k \geq 2)$ være forskjellige heltall fra mengden $\{1, \ldots, n\}$, slik at n deler $a_i(a_{i+1} - 1)$ for $i = 1, \ldots, k-1$. Vis at n ikke deler $a_k(a_1 - 1)$.

Oppgave 2. La ABC være en trekant med omsenter O. Punktene P og Q er indre punkter på sidene CA, henholdsvis AB. La K, L og M være midtpunktene til linjestykkene henholdsvis BP, CQ og PQ, og la Γ være sirkelen som går gjennom K, L og M. Anta at linjen PQ tangerer sirkelen Γ. Vis at $OP = OQ$.

Oppgave 3. Anta at $s_1, s_2, s_3, \ldots$ er en strengt økende følge av positive heltall slik at delfølgene

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots \qquad \text{og} \qquad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots$$

begge er aritmetiske følger. Vis at følgen $s_1, s_2, s_3, \ldots$ er selv en aritmetisk følge.

Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter
Hver oppgave er verdt 7 poeng

Torsdag 16. juli 2009

Oppgave 4. La ABC være en trekant med $AB = AC$. Halveringslinjen til $\angle CAB$ skjærer siden BC i D, mens halveringslinjen til $\angle ABC$ skjærer siden CA i E. La K være ADCs innsenter. Anta at $\angle BEK = 45°$. Finn alle mulige verdier til $\angle CAB$.

Oppgave 5. Bestem alle funksjoner $f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ (der $\mathbb{N}^+$ betegner mengden av positive heltall) slik at det for alle positive heltall a og b finnes en ikke-degenerert trekant med sidelengder

$$a, \ f(b) \ \text{ og } \ f(b + f(a) - 1).$$

(En trekant er *ikke-degenerert* dersom hjørnene ikke ligger på en linje)

Oppgave 6. La $n \in \mathbb{N}^+$. La videre $a_1, a_2, \ldots, a_n$ være forskjellige positive heltall, og la M være en mengde bestående av $n-1$ positive heltall forskjellige fra $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. En gresshopper skal hoppe langs den reelle tallinjen, med start i 0. Den skal gjøre n hopp til høyre med lengder $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i en eller annen rekkefølge. Vis at denne rekkefølgen kan velges slik at gresshopperen aldri havner i et punkt som ligger i M.

Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter
Hver oppgave er verdt 7 poeng