Onsdag 7. juli 2010

Oppgave 1. Bestem alle funksjoner $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som tilfredsstiller

$$f\big(\lfloor x \rfloor y\big) = f(x)\big\lfloor f(y) \big\rfloor$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}$. ($\lfloor z \rfloor$ betegner her det største heltallet som er mindre enn eller lik z.)

Oppgave 2. La I være innsenteret til trekanten ABC, Γ dens omsirkel, og la linjen AI skjære Γ igjen i D. La videre E være et punkt på buen $\widehat{BDC}$ og F et punkt på siden BC slik at

$$\angle BAF = \angle CAE < \tfrac{1}{2}\angle BAC.$$

La G være midtpunktet til linjestykket IF. Vis at linjene DG og EI skjærer hverandre på Γ.

Oppgave 3. La $\mathbb{N}^+$ betegne mengden av positive heltall. Bestem alle funksjoner $g\colon \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ for hvilke

$$\big(g(m) + n\big)\big(m + g(n)\big)$$

er et kvadrattall for alle $m, n \in \mathbb{N}^+$.

Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter
Hver oppgave er verdt 7 poeng

Language: **Norwegian**

Day: **2**

Torsdag 8. juli 2010

Oppgave 4. La P være et punkt innenfor trekanten ABC. Linjene AP, BP og CP skjærer ABCs omsirkel Γ igjen i henholdsvis K, L og M. Tangenten til Γ i C skjærer linjen AB i S. Anta at $SC = SP$. Vis at $MK = ML$.

Oppgave 5. I hver av de seks boksene $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ ligger det opprinnelig én mynt. To typer trekk er tillatt:

Type 1: Velg en ikketom boks B_j med $1 \leq j \leq 5$. Ta ut én mynt av B_j og legg to nye mynter i B_{j+1}.

Type 2: Velg en ikketom boks B_k med $1 \leq k \leq 4$. Ta ut én mynt av B_k og bytt innholdene av (de muligens tomme) boksene B_{k+1} og B_{k+2}.

Bestem om det finnes en endelig følge av trekk som fører til at boksene B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 blir tomme, mens boksen B_6 inneholder nøyaktig $2010^{2010^{2010}}$ mynter. (Obs.: $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

Oppgave 6. La $a_1, a_2, a_3, \ldots$ være en følge av positive reelle tall. Anta at vi for et eller annet positivt heltall s har at

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \leq k \leq n-1\}$$

gjelder for alle $n > s$. Vis at det finnes positive heltall ℓ og N, der $\ell \leq s$, slik at $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ for alle $n \geq N$.