Mandag, den 18. juli 2011

Oppgave 1. For en vilkårlig mengde $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ bestående av fire forskjellige positive heltall betegner s_A summen $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ og n_A antallet par (i, j) med $1 \leq i < j \leq 4$ der $a_i + a_j$ deler s_A. Finn alle slike mengder A for hvilke n_A er maksimal.

Oppgave 2. La $\mathcal{S}$ være en endelig mengde bestående av minst to punkter i planet. Anta at ingen tre av punktene i $\mathcal{S}$ ligger på én linje. En *vindmølle* er en prosess som starter med en linje ℓ som går gjennom nøyaktig ett punkt $P \in \mathcal{S}$. Linjen dreies med urviseren om *vippunktet* P inntil den for første gang treffer et nytt punkt i $\mathcal{S}$. Dette punktet Q tar deretter over rollen som vippunkt, og vi fortsetter å dreie linjen med urviseren rundt Q inntil den igjen treffer et punkt i $\mathcal{S}$. Denne prosessen forsettes i det uendelige.
Vis at vi kan velge et punkt P i $\mathcal{S}$ og en linje ℓ gjennom P slik at hvert punkt i $\mathcal{S}$ benyttes uendelig mange ganger som vippunkt i den resulterende vindmøllen.

Oppgave 3. La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en funksjon som tilfredsstiller

$$f(x + y) \leq y f(x) + f(f(x))$$

for alle reelle tall x og y. Vis at $f(x) = 0$ for alle $x \leq 0$.

Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter
Hver oppgave er verdt 7 poeng

Tirsdag, den 19. juli 2011

Oppgave 4. La $n > 0$ være et heltall. Vi har n lodd med massene 2^0, $2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Vi ønsker å plassere alle loddene ett og ett på skålvekten slik at høyre skål aldri blir tyngre enn venstre skål. I hvert trekk velger vi ett av loddene som ikke ennå er på vekten, og legger den enten i den høyre eller den venstre skålen, inntil alle loddene er blitt plassert.
Bestem antallet mulige måter dette kan utføres på.

Oppgave 5. La f være en funksjon fra mengden av heltall til mengden av positive heltall. Anta at $f(m-n)$ deler $f(m) - f(n)$ for ethvert par av heltall m og n. Vis at $f(m)$ deler $f(n)$ for alle heltall m og n som tilfredsstiller $f(m) \leq f(n)$.

Oppgave 6. La ABC være en spissvinklet trekant med omsirkel Γ. La videre ℓ være en linje som tangerer Γ, og ℓ_a, ℓ_b samt ℓ_c dens speilbilder om henholdsvis BC, CA og AB. Vis at omsirkelen til trekanten som dannes av ℓ_a, ℓ_b og ℓ_c tangerer sirkelen Γ.

Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter
Hver oppgave er verdt 7 poeng