Tirsdag 10. juli 2012

Oppgave 1. Gitt en trekant ABC, la J være sentrum i utsirkelen motsatt A. Denne utsirkelen tangerer siden BC i M, og de to sidelinjene AB og AC i henholdsvis K og L. Linjene LM og BJ skjærer hverandre i F, mens linjene KM og CJ skjærer hverandre i G. La videre S være skjæringspunktet til linjene AF og BC, samt T være skjæringspunktet til linjene AG og BC.

Vis at M er midtpunktet til ST.

(*Utsirkelen* til ABC motsatt A er sirkelen som tangerer linjestykket BC, strålen AB bortenfor B, samt strålen AC bortenfor C).

Oppgave 2. La $n \geq 3$ være et heltall, og $a_2, a_3, \ldots, a_n$ positive reelle tall slik at $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Vis at

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \cdots (1+a_n)^n \ > \ n^n.$$

Oppgave 3. *Løgnerens gjettespill* er et spill som spilles av to personer A og B. Spillets regler avhenger av to positive heltall k og n som er kjent for begge spillere.

Ved spillets start velger A heltall x og N slik at $1 \leq x \leq N$. Spiller A holder x hemmelig, mens B får vite N-s sanne verdi. Deretter forsøker spiller B å tilegne seg informasjon om x ved å stille A spørsmål som følger: for hvert spørsmål velger B én – eventuelt tidligere allerede brukt – vilkårlig mengde S av positive heltall, og spør A om hvorvidt x tilhører S; spiller B kan stille så mange spørsmål han måtte ønske. Etter hvert spørsmål må spiller A omgående svare med enten *ja* eller *nei*, men får lov til å lyve så ofte som han vil; eneste begrensning er at det blant hver $k+1$ påfølgende svar må finnes minst ett som tilsvarer sannheten.

Etter at B har stilt så mange spørsmål som han vil, må han oppgi én mengde X bestående av høyst n positive heltall. Dersom x tilhører X, vinner B, ellers taper han. Vis følgende:

1. For $n \geq 2^k$ har B en vinnende strategi.
2. For ethvert stort nok heltall k finnes det et heltall $n \geq 1,99^k$ slik at B ikke har noen vinnende strategi.

Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter
Hver oppgave er verdt 7 poeng

Onsdag 11. juli 2012

Oppgave 4. Finn alle funksjoner $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ slik at vi for alle heltall a, b og c som tilfredsstiller $a+b+c=0$ har følgende likhet:

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 \;=\; 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

($\mathbb{Z}$ betegner mengden av heltall).

Oppgave 5. La ABC være en trekant med $\angle BCA = 90°$, la D være fotpunktet til høyden fra C, og X et indre punkt på linjestykket CD. La videre K være punktet på linjestykket AX som tilfredsstiller $BK = BC$ og L punktet på linjestykket BX som tilfredsstiller $AL = AC$. La endelig M være skjæringspunktet til AL og BK.

Vis at $MK = ML$.

Oppgave 6. Finn alle positive heltall n for hvilke det finnes ikke-negative heltall $a_1, a_2, \ldots, a_n$ slik at

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} \;=\; \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} \;=\; 1.$$

Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter
Hver oppgave er verdt 7 poeng