Tirsdag 23. juli 2013

Oppgave 1. Vis at for ethvert par av positive heltall k og n finnes det k positive, ikke nødvendigvis forskjellige, heltall $m_1, m_2, \ldots, m_k$ slik at

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

Oppgave 2. En konfigurasjon av 4027 punkter i planet kalles *colombiansk* hvis den består av 2013 røde og 2014 blå punkter, og ingen tre av punktene i konfigurasjonen er kollineære. Planet deles opp i regioner ved å trekke inn noen linjer. Et utvalg av linjer er *godt* for en colombiansk konfigurasjon hvis følgende to betingelser er oppfylt:

- ingen av linjene går gjennom noen av konfigurasjonens punkter;
- ingen region dannet av linjene inneholder punkter av begge farger.

Finn den minste verdien av k slik at det for enhver colombiansk konfigurasjon av 4027 punkter finnes et godt utvalg bestående av k linjer.

Oppgave 3. La utsirkelen til ABC motsatt A tangere siden BC i A_1. Punktene B_1 på CA og C_1 på AB defineres på tilsvarende måte ved hjelp av utsirklene motsatt henholdsvis B og C. Anta at omsenteret til trekanten $A_1B_1C_1$ ligger på omsirkelen til trekanten ABC. Vis at trekanten ABC er rettvinklet.

Utsirkelen til ABC motsatt A er sirkelen som tangerer linjestykket BC, strålen AB bortenfor B, samt strålen AC bortenfor C. Utsirklene motsatt B og C defineres på tilsvarende måte.

Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter
Hver oppgave er verdt 7 poeng

Onsdag 24. juli 2013

Oppgave 4. La ABC en spissvinklet trekant med ortosenter H, og la W være et indre punkt på siden BC. Videre la M og N være høydefotpunktene fra henholdsvis B og C. La ω_1 være omsirkelen til BWN, og X punktet på ω_1 slik at WX blir en diameter i ω_1. På samme måte la ω_2 være omsirkelen til CWM, og Y punktet på ω_2 slik at WY blir en diameter i ω_2. Vis at X, Y og H er kollineære.

Oppgave 5. La $\mathbb{Q}_{>0}$ være mengden av positive rasjonale tall. La videre $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ være en funskjon som tilfredsstiller følgende tre betingelser:

(i) $f(x)f(y) \geq f(xy)$ for alle $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$;

(ii) $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ for alle $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$;

(iii) det finnes et rasjonalt tall $a > 1$ slik at $f(a) = a$.

Vis at $f(x) = x$ for alle $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

Oppgave 6. La $n \geq 3$ være et heltall. Betrakt en sirkel med $n+1$ punkter regelmessig fordelt på dens omkrets. Hvert av disse punktene tilordnes ett av tallene $0, 1, \ldots, n$ slik at hvert tall forekommer nøyaktig én gang; to slike tilordninger regnes som like dersom den ene kan fåes fra den andre ved å rotere sirkelen. En tilordning kalles *fin* dersom det for hver fire tilordnede tall $a < b < c < d$ med $a + d = b + c$ gjelder at korden mellom punktene som tilordnes a og d ikke skjærer korden mellom punktene som tilordnes b og c.

La M være antallet fine tilordninger, og la N være antallet ordnede par (x, y) av positive heltall slik at $x + y \leq n$ og $\gcd(x, y) = 1$. Vis at

$$M = N + 1.$$

Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter
Hver oppgave er verdt 7 poeng