

Tirsdag 23. juli 2013

**Oppgave 1.** Vis at for ethvert par av positive heltall  $k$  og  $n$  finnes det  $k$  positive, ikke nødvendigvis forskjellige, heltall  $m_1, m_2, \dots, m_k$  slik at

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

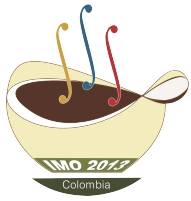
**Oppgave 2.** En konfigurasjon av 4027 punkter i planet kalles *colombiansk* hvis den består av 2013 røde og 2014 blå punkter, og ingen tre av punktene i konfigurasjonen er kollineære. Planet deles opp i regioner ved å trekke inn noen linjer. Et utvalg av linjer er *godt* for en colombiansk konfigurasjon hvis følgende to betingelser er oppfylt:

- ingen av linjene går gjennom noen av konfigurasjonens punkter;
- ingen region dannet av linjene inneholder punkter av begge farger.

Finn den minste verdien av  $k$  slik at det for enhver colombiansk konfigurasjon av 4027 punkter finnes et godt utvalg bestående av  $k$  linjer.

**Oppgave 3.** La utsirkelen til  $ABC$  motsatt  $A$  tangere siden  $BC$  i  $A_1$ . Punktene  $B_1$  på  $CA$  og  $C_1$  på  $AB$  defineres på tilsvarende måte ved hjelp av utsirkelen motsatt henholdsvis  $B$  og  $C$ . Anta at omsenteret til trekanten  $A_1B_1C_1$  ligger på omsirkelen til trekanten  $ABC$ . Vis at trekanten  $ABC$  er rettvinklet.

*Utsirkelen til  $ABC$  motsatt  $A$  er sirkelen som tangerer linjestykket  $BC$ , strålen  $AB$  bortenfor  $B$ , samt strålen  $AC$  bortenfor  $C$ . Utsirkelen motsatt  $B$  og  $C$  defineres på tilsvarende måte.*



Onsdag 24. juli 2013

**Oppgave 4.** La  $ABC$  en spissvinklet trekant med ortosenter  $H$ , og la  $W$  være et indre punkt på siden  $BC$ . Videre la  $M$  og  $N$  være høydefotpunktene fra henholdsvis  $B$  og  $C$ . La  $\omega_1$  være omsirkelen til  $BWN$ , og  $X$  punktet på  $\omega_1$  slik at  $WX$  blir en diameter i  $\omega_1$ . På samme måte la  $\omega_2$  være omsirkelen til  $CWM$ , og  $Y$  punktet på  $\omega_2$  slik at  $WY$  blir en diameter i  $\omega_2$ . Vis at  $X$ ,  $Y$  og  $H$  er kollineære.

**Oppgave 5.** La  $\mathbb{Q}_{>0}$  være mengden av positive rasjonale tall. La videre  $f: \mathbb{Q}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  være en funksjon som tilfredsstiller følgende tre betingelser:

- (i)  $f(x)f(y) \geq f(xy)$  for alle  $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ ;
- (ii)  $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$  for alle  $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ ;
- (iii) det finnes et rasjonalt tall  $a > 1$  slik at  $f(a) = a$ .

Vis at  $f(x) = x$  for alle  $x \in \mathbb{Q}_{>0}$ .

**Oppgave 6.** La  $n \geq 3$  være et heltall. Betrakt en sirkel med  $n + 1$  punkter regelmessig fordelt på dens omkrets. Hvert av disse punktene tilordnes ett av tallene  $0, 1, \dots, n$  slik at hvert tall forekommer nøyaktig én gang; to slike tilordninger regnes som like dersom den ene kan fåes fra den andre ved å rotere sirkelen. En tilordning kalles *fin* dersom det for hver fire tilordnede tall  $a < b < c < d$  med  $a + d = b + c$  gjelder at korden mellom punktene som tilordnes  $a$  og  $d$  ikke skjærer korden mellom punktene som tilordnes  $b$  og  $c$ .

La  $M$  være antallet fine tilordninger, og la  $N$  være antallet ordnede par  $(x, y)$  av positive heltall slik at  $x + y \leq n$  og  $\gcd(x, y) = 1$ . Vis at

$$M = N + 1.$$