Tirsdag 8. juli 2014

Oppgave 1. La $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ være en uendelig følge av positive heltall. Vis at det finnes ett eneste heltall $n \geq 1$ slik at

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

Oppgave 2. La $n \geq 2$ være et heltall. Betrakt et $n \times n$ sjakkbrett bestående av n^2 felter. En konfigurasjon av n tårn på dette brettet kalles *fredelig* hvis det i hver rad og i hver kolonne står ett tårn. Finn det største positive heltallet k slik at det for enhver fredelig konfigurasjon av n tårn finnes et $k \times k$ kvadrat uten tårn på noen av sine k^2 felter.

Oppgave 3. I den konvekse firkanten $ABCD$ er $\angle ABC = \angle CDA = 90°$. La H være fotpunktet til normalen fra A til BD. Punktene S og T ligger på sidene henholdsvis AB og AD slik at H er et indre punkt i trekanten SCT,

$$\angle CHS - \angle CSB = 90° \text{ og } \quad \angle THC - \angle DTC = 90°\,.$$

Vis at linjen BD tangerer omsirkelen til trekanten TSH.

Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter
Hver oppgave er verdt 7 poeng

Onsdag 9. juli 2014

Oppgave 4. Punktene P og Q ligger på siden BC i den spissvinklede trekanten ABC slik at $\angle PAB = \angle BCA$ og $\angle CAQ = \angle ABC$. Punktene M og N ligger på linjene henholdsvis AP og AQ, slik at P er midtpunktet på AM, og Q er midtpunktet på AN. Vis at linjene BM og CN skjærer hverandre på omsirkelen til trekanten ABC.

Oppgave 5. For hvert positivt heltall n har Bank of Cape Town utgitt mynter med pålydende $\frac{1}{n}$. Gitt en endelig haug med slike mynter (som ikke nødvendigvis alle har forskjellig pålydende) med samlet verdi høyst $99 + \frac{1}{2}$, vis at det er mulig å splitte denne haugen i 100 eller færre småhauger, slik at ingen av disse har en totalverdi som overstiger 1.

Oppgave 6. En mengde av linjer i planet sies å være i *generell posisjon* dersom ingen to av dem er parallelle og ingen tre av dem går gjennom samme punkt. En mengde av linjer i generell posisjon kutter planet i regioner, noen av hvilke har endelig areal, og disse sistnevnte kalles dens *endelige regioner*. Vis at for alle store nok n, er det for enhver mengde av n linjer i generell posisjon mulig å farge minst $\sqrt{n}$ av linjene blå slik at ingen av mengdens endelige regioner har en fullstendig blå rand.

NB: Resultater med $c\sqrt{n}$ istedenfor $\sqrt{n}$ blir tildelt poeng avhengig av konstanten c.

Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter
Hver oppgave er verdt 7 poeng