Language: **Norwegian**

Day: **1**

Fredag 10. juli 2015

Oppgave 1. En endelig mengde $\mathcal{S}$ av punkter i planet kalles *balansert* hvis det for ethvert par av forskjellige punkter A og B i $\mathcal{S}$ finnes et punkt C i $\mathcal{S}$ slik at $AC = BC$. Mengden $\mathcal{S}$ kalles *senterfri* hvis det for intet trippel av forskjellige punkter A, B og C i $\mathcal{S}$ finnes noen punkt P i $\mathcal{S}$ slik at $PA = PB = PC$.

(a) Vis at det for alle heltall $n \geqslant 3$ finnes en balansert mengde bestående av nøyaktig n punkter.

(b) Bestem alle heltall $n \geqslant 3$ for hvilke det finnes en balansert senterfri mengde bestående av nøyaktig n punkter.

Oppgave 2. Bestem alle tripler (a, b, c) av positive heltall for hvilke hvert av tallene

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

er en potens av 2.

(*En potens av* 2 *er et heltall på formen* 2^n, *der* n *er et ikkenegativt heltall.*)

Oppgave 3. La ABC være en spissvinklet trekant med $AB > AC$. La Γ være dens omsirkel, H dens ortosenter, og F fotpunktet til høyden fra A. La M være midtpunktet på BC. La Q være punktet på Γ slik at $\angle HQA = 90^\circ$, og la K være punktet på Γ slik at $\angle HKQ = 90^\circ$. Anta at punktene A, B, C, K og Q er alle forskjellige, og ligger på Γ i denne rekkefølgen.

Vis at omsirklene til trekantene KQH og FKM tangerer hverandre.

Lørdag 11. juli 2015

Oppgave 4. La Ω være omsirkelen til trekanten ABC, og O dens omsenter. En sirkel Γ med sentrum i A skjærer linjestykket BC i punktene D og E, slik at B, D, E og C er alle forskjellige og ligger på linjen BC i denne rekkefølgen. La F og G være skjæringspunktene mellom Γ og Ω, slik at A, F, B, C og G ligger på Ω i denne rekkefølgen. La K være det andre skjæringspunktet mellom omsirkelen til BDF og linjestykket AB. La L være det andre skjæringspunktet mellom omsirkelen til CGE og linjestykket CA.

Anta at linjene FK og GL ikke sammenfaller og skjæres i punktet X. Vis at X ligger på linjen AO.

Oppgave 5. La $\mathbb{R}$ betegne mengden av reelle tall. Bestem alle funksjoner $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som tilfredsstiller

$$f\big(x + f(x+y)\big) + f(xy) \;=\; x + f(x+y) + yf(x)$$

for alle reelle tall x og y.

Oppgave 6. Følgen $a_1, a_2, \ldots$ av heltall tilfredsstiller følgende betingelser:

(i) $1 \leqslant a_j \leqslant 2015$ for alle $j \geqslant 1$;

(ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ for alle $1 \leqslant k < \ell$.

Vis at det finnes to positive heltall b og N slik at

$$\left|\sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b)\right| \leqslant 1007^2$$

for alle heltall m og n med $n > m \geqslant N$.

Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter
Hver oppgave er verdt 7 poeng