Mandag 11. juli 2016

Oppgave 1. Trekanten BCF er rettvinklet i B. La A være punktet på linjen CF slik at $FA = FB$ og F ligger mellom A og C. Punktet D velges slik at $DA = DC$ og AC er halveringslinjen til $\angle DAB$. Punktet E velges slik at $EA = ED$ og AD er halveringslinjen til $\angle EAC$. La M være midtpunktet på CF. La videre X være punktet slik at $AMXE$ er et parallellogram (altså $AM \parallel EX$ og $AE \parallel MX$). Vis at linjene BD, FX og ME skjærer hverandre i ett punkt.

Oppgave 2. Finn alle positive heltall n for hvilke hver celle i en $n \times n$-tabell kan fylles med ett av bokstavene I, M og O slik at følgende to betingelser oppfylles:

- i hver rad og hver kolonne er en tredel av bokstavene I, en tredel M og en tredel O,
- i hver diagonal der antall celler er delelig med tre, er en tredel av bokstavene I, en tredel M og en tredel O.

Merk: radene og kolonnene i en $n \times n$-tabell nummereres fra 1 til n i vanlig rekkefølge. Dermed vil hver celle tilsvare ett par av heltall (i, j) der $1 \leqslant i, j \leqslant n$. For $n > 1$ har tabellen $4n - 2$ *diagonaler* av to typer. En diagonal av den første typen består av alle celler (i, j) for hvilke $i + j$ er lik en konstant, og en diagonal av den andre typen består av alle celler (i, j) for hvilke $i - j$ er lik en konstant.

Oppgave 3. La $P = A_1A_2 \ldots A_k$ være en konveks mangekant i planet. Hjørnene $A_1, A_2, \ldots, A_k$ har heltallige koordinater og ligger på en sirkel. La S betegne arealet til P. Et odde positivt heltall n er gitt slik at kvadratet til hver sidelengde i P er et heltall delelig med n. Vis at $2S$ er et heltall delelig med n.

Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter
Hver oppgave er verdt 7 poeng

Tirsdag 12. juli 2016

Oppgave 4. En mengde positive heltall kalles *duftende* hvis den består av minst to elementer og hvert av elementene har en primtallsfaktor til felles med minst ett av de andre elementene. La $P(n) = n^2 + n + 1$. Hva er det minste positive heltallet b slik at det finnes et ikke-negativt heltall a for hvilket

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

er duftende?

Oppgave 5. Ligningen

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

skrives på en tavle, med 2016 lineære faktorer på hver side. Hva er den minste mulige verdien av k for hvilken det er mulig å viske ut nøyaktig k av disse 4032 lineære faktorene slik at at minst én faktor står igjen på hver side, men den resulterende ligningen ikke har noen reelle løsninger?

Oppgave 6. Vi har $n \geqslant 2$ linjestykker i planet slik at hvert par av linjestykker skjærer hverandre i ett indre punkt, mens ingen tre linjestykker har noen felles punkt. Nils må velge et endepunkt på hvert linjestykke og plassere en frosk på den, vendt mot det andre endepunktet. Deretter klapper han hendene sammen nøyaktig $n-1$ ganger. Ved hver klapp hopper enhver frosk omgående fremover til det neste skjæringspunktet på linjestykket sitt. Froskene endrer aldri retning. Nils ønsker å plassere forskene på en slik måte at det aldri er to frosker på samme skjæringspunkt samtidig.

(a) Vis at Nils alltid kan få sitt ønske oppfylt om n er odde.

(b) Vis at Nils aldri kan få sitt ønske oppfylt om n er jevn.

Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter
Hver oppgave er verdt 7 poeng