Torsdag 18. juli 2017

Oppgave 1. For hvert heltall $a_0 > 1$ defineres følgen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ved

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{hvis } \sqrt{a_n} \text{ er et heltall,} \\ a_n + 3 & \text{ellers,} \end{cases} \qquad \text{for alle } n \geqslant 0.$$

Bestem alle verdier av a_0 for hvilke det finnes et heltall A slik at $a_n = A$ for uendelig mange verdier av n.

Oppgave 2. La $\mathbb{R}$ betegne mengden av reelle tall. Bestem alle funksjoner $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ slik at

$$f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy)$$

for alle reelle tall x og y.

Oppgave 3. En jeger og en usynlig hare spiller i planet. Harens startpunkt A_0 og jegerens startpunkt B_0 sammenfaller. Etter $n-1$ runder av spillet befinner haren seg i et punkt A_{n-1} og jegeren i et punkt B_{n-1}. I den n-te runden av spillet skjer følgende tre ting i rekkefølge.

(i) Haren beveger seg uten å bli sett til et punkt A_n slik at avstanden mellom A_{n-1} og A_n er lik 1.

(ii) Et sporingsapparat rapporterer et punkt P_n til jegeren. Det eneste apparatet garanterer er at avstanden mellom P_n og A_n er høyst 1.

(iii) Jegeren beveger seg på en synlig måte til et punkt B_n slik at avstanden mellom B_{n-1} og B_n er lik 1.

Er det alltid mulig for jegeren, uansett hvordan haren beveger seg og hvilke punkter apparatet rapporterer, å velge sine bevegelser på en slik måte at han etter 10^9 runder kan være sikker på at avstanden mellom haren og ham er høyst 100?

Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter
Hver oppgave er verdt 7 poeng

Onsdag 19. juli 2017

Oppgave 4. La R og S være to forskjellige punkter på sirkelen Ω slik at RS ikke er en diameter. La ℓ være tangenten til Ω i R. Punktet T er slik at S er midtpunktet på linjestykket RT. Punktet J velges på den kortere buen RS av Ω slik at omsirkelen Γ til trekanten JST skjærer ℓ i to forskjellige punkter. La A være det skjæringspunktet til Γ og ℓ som ligger nærmest R. Linjen AJ skjærer Ω igjen i K. Vis at linjen KT tangerer Γ.

Oppgave 5. Et heltall $N \geqslant 2$ er gitt. En gruppe på $N(N+1)$ fotballspillere, ingen to av dem like høye, stiller opp på rad. Nils ønsker å sende bort $N(N-1)$ av spillerne slik at den resulterende raden med de $2N$ gjenværende spillerne har følgende N egenskaper:

(1) ingen står mellom de to høyeste spillerne,

(2) ingen står mellom den tredje og den fjerde høyeste spilleren,

$\vdots$

(N) ingen står mellom de to laveste spillerne.

Vis at dette alltid er mulig.

Oppgave 6. Et ordnet par av heltall (x, y) er et *primitivt punkt* dersom den største felles faktoren i x og y er 1. Gitt en endelig mengde S av primitive punkter, vis at det finnes et positivt heltall n og heltall $a_0, a_1, \ldots, a_n$ slik at

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1$$

for alle (x, y) i S.

Language: Norwegian

Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter
Hver oppgave er verdt 7 poeng