Mandag 9. juli 2018

Oppgave 1. La Γ være omsirkelen til den spissvinklede trekanten ABC. Punktene D og E ligger på linjestykkene AB henholdsvis AC, slik at $AD = AE$. Midtnormalene til BD henholdsvis CE skjærer de kortere buene AB henholdsvis AC til Γ i punktene F henholdsvis G. Vis at linjene DE og FG sammenfaller eller er parallelle.

Oppgave 2. Finn alle heltall $n \geq 3$ for hvilke det finnes reelle tall $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$ slik at $a_{n+1} = a_1$ og $a_{n+2} = a_2$, samt

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

for $i = 1, 2, \ldots, n$.

Oppgave 3. En *anti-Pascal-trekant* er en tabell formet som en likesidet trekant og som er slik at, bortsett for tallene i den nederste raden, hvert tall er absoluttverdien av differansen mellom de to tallene rett under. For eksempel er følgende tabell en anti-Pascal-trekant med fire rader som inneholder alle heltall fra 1 til 10.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

Finnes det en anti-Pascal-trekant med 2018 rader som inneholder alle heltall fra 1 til $1 + 2 + \cdots + 2018$?

Language: Norwegian

Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter
Hver oppgave er verdt 7 poeng

Tirsdag 10. juli 2018

Oppgave 4. En *plett* er et punkt (x, y) i planet slik at x og y begge er positive heltall mindre enn eller lik 20.

Til å begynne med er alle 400 pletter ledige. Anna og Bjørnar plasserer steiner vekselsvis, og Anna starter. På sin tur plasserer Anna én ny rød stein på en ledig plett slik at avstanden mellom ethvert par av pletter med røde steiner på er forskjellig fra $\sqrt{5}$. På sin tur plasserer Bjørnar én ny blå stein på en vilkårlig ledig plett (en plett med blå stein på kan ha vilkårlig avstand fra enhver annen opptatt plett). De stopper idet en av dem ikke kan plassere en ny stein.

Finn det største tallet K slik at Anna kan sikre seg å kunne plassere minst K røde steiner, uansett hvodan Bjørnar plasserer sine blå steiner.

Oppgave 5. La $a_1, a_2, \ldots$ være en uendelig følge av positive heltall. Anta at det finnes et heltall $N > 1$ slik at

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

er et heltall for enhver $n \geq N$. Vis at det finnes et positivt heltall M slik at $a_m = a_{m+1}$ for alle $m \geq M$.

Oppgave 6. En konveks firkant $ABCD$ tilfredsstiller $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. Punktet X ligger i $ABCD$ slik at

$$\angle XAB = \angle XCD \quad \text{og} \quad \angle XBC = \angle XDA.$$

Vis at $\angle BXA + \angle DXC = 180°$.

Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter
Hver oppgave er verdt 7 poeng