FØRSTE DAG

Mar del Plata, Argentina - 24. Juli 1997

Oppgave 1

Punktene i plandet med heltallige koordinater er hjørner i et kvadratisk rutenett med sidelengde 1. Kvadratene i rutenettet er farget svart og hvitt som rutene på et sjakkbrett.

For hvert par av positive hele tall m og n betrakter vi en rettvinklet trekant med kateter som ligger langs linjene i rutenettet og som har lengder m og n. Trekantens hjørner har heltallige koordinater.

Arealene som er farget svart og hvitt i denne trekanten kaller vi henholdsvis S_1 og S_2. Vi setter

$$f(m,n) = |S_1 - S_2|.$$

a) Beregn $f(m,n)$ for alle positive hele tall m og n, som enten begge er partall eller begge er oddetall.

b) Vis at $f(m,n) \leq \frac{1}{2}\max\{m,n\}$ for alle m og n.

c) Vis at det ikke finnes noen konstant C slik at $f(m,n) < C$ for alle m og n.

Oppgave 2

I trekant ABC er $\angle A$ den minste.

Punktene B og C deler ΔABC sin omskrevne sirkel i to buer. La U være et indre punkt på den buen mellom B og C som ikke inneholder A.

Midtnormalene på AB og AC skjærer linjen AU i henholdsvis V og W. La T være skjæringspunktet mellom BV og CW.

Vis at

$$AU = TB + TC.$$

Oppgave 3

La $x_1, x_2, \ldots, x_n$ være reelle tall slik at følgende to betingelser er oppfylt:

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| = 1$$

og

$$|x_i| \leq \frac{n+1}{2} \quad \text{for} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Vis at det finnes en permutasjon $y_1, y_2, \ldots, y_n$ av $x_1, x_2, \ldots, x_n$ slik at

$$|y_1 + 2y_2 + \cdots + ny_n| \leq \frac{n+1}{2}.$$

ANDRE DAG

Mar del Plata, Argentina - 25. Juli 1997

Oppgave 4

Elementene i en $n \times n$ matrise (kvadratisk tallskjema med n linjer og n søyler) er tall i mengden $S = \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$. En slik matrise vil vi kalle for en *de Plata matrise* dersom linje nr. i og søyle nr. i tilsammen inneholder alle elementene i S for hver $i = 1, \ldots, n$. Vis at

a) det ikke fins noen de Plata matrise for $n = 1997$;

b) det eksisterer de Plata matriser for uendelig mange verdier av n.

Oppgave 5

Bestem alle tallpar (a, b) der $a \geq 1$ og $b \geq 1$ er naturlige tall slik at

$$a^{b^2} = b^a.$$

Oppgave 6

For hvert naturlig tall n skal $f(n)$ være antall måter vi kan skrive n som en sum av potenser med 2 som grunntall og med ikke-negative heltallige ekspoonenter.

Representasjoner av n, som bare adskiller seg i rekkefølge av addendene vil vi betrakte som like. For eksempel er $f(4) = 4$, fordi tallet 4 kan skrives på følgende fire måter: 4; $2+2$; $2+1+1$; $1+1+1+1$.

Vis at for alle $n \geq 3$ gjelder

$$2^{n^2/4} < f(2^n) < 2^{n^2/2}.$$