Den 39. Internasjonale Matematikk-Olympiade

Første dag—Taipei—15. juli 1998

Oppgave 1

La $ABCD$ være en konveks firkant slik at diagonalene AC og BD står normalt på hverandre og sidene AB og DC ikke er parallelle. Anta at midtnormalene på AB og DC skjærer hverandre i et punkt P inni firkanten $ABCD$. Vis at $ABCD$ er syklisk (hjørnene ligger på en sirkel) hvis og bare hvis trekantene ABP og CDP har samme areal.

Oppgave 2

I en konkurranse er det a deltagere og b dommere der $b \geq 3$ er et oddetall. Hver dommer gir hver deltager karakteren "bestått" eller "ikke bestått". Anta at k er et tall slik at for ethvert par av dommere stemmer karakterene overens for maksimalt k av deltagerne. Vis at

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}.$$

Oppgave 3

For n et positivt heltall, la $d(n)$ være antallet positive divisorer til n (inklusive 1 og n). Finn alle positive heltall k slik at

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$$

for en eller flere n.

Den 39. Internasjonale Matematikk-Olympiade

Andre dag—Taipei—16. juli 1998

Oppgave 4

Finn alle par (a, b) av positive heltall slik at $ab^2 + b + 7$ deler $a^2b + a + b$.

Oppgave 5

La trekanten ABC ha innskrevet sirkel med sentrum I. Den innskrevne sirkelen berører sidene BC, CA og AB i henholdsvis K, L og M. Linjen gjennom B parallell med MK skjærer LM i R og LK i S. Vis at $\angle RIS$ er spissvinklet.

Oppgave 6

Betrakt alle funksjoner f definert på de positive heltall, $\mathbf{N}$, og med verdier i $\mathbf{N}$ slik at

$$f\Big(t^2 f(s)\Big) = s\Big(f(t)\Big)^2$$

for alle s og t i $\mathbf{N}$. Finn den miste mulige verdi av $f(1998)$.